Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

5 de Junho de 2008 Duração: 2h

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   Seja V um espaço vectorial real com base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Seja $T : V \to V$ a transformação linear que, relativamente à base B, é representada pela matriz A.

   (a) A aplicação T é injectiva? E sobrejectiva? Justifique.

   (b) Calcule $T(v_1 - 2v_2 + v_3)$.

   (c) Determine o núcleo de T.

   (d) Determine uma base do subespaço imagem de T.

   (e) Determine os valores próprios de T.

   (f) Diga se existe alguma base de V relativamente à qual T seja representada por uma matriz diagonal. Em caso afirmativo, escreva essa matriz diagonal.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja $A \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$. Então a transformação $T\colon M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{p\times n}(\mathbb{R})$ definida por $X \to AX$ é linear.

   (b) Se $\{v_1, v_2\}$ for uma base ortonormada de um espaço vectorial com produto interno, então $\|v_1 - v_2\|^2 = 2$.

3. No espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considere o produto interno definido por $\langle A, B\rangle = tr(A^T B)$, para quaisquer $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (a) Determine uma base ortogonal do subespaço vectorial

   $$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;:\; a = b = c \right\}.$$

   (b) Calcule a matriz de F mais próxima de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$.

   (a) Mostre que se $T : V \to W$ for um isomorfismo, então T transforma uma base de V numa base de W.

   (b) Seja $\mathfrak{L}(V, W)$ o espaço vectorial de todas as transformações lineares de V em W. Determine uma base de $\mathfrak{L}(V, W)$.