Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

26 de Maio de 2010 Duração: 1h20

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Seja V um espaço vectorial real e $B = \{v_1, v_2\}$ uma base de V. Seja $T : V \to V$ a transformação linear representada, relativamente à base B, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule $T(2v_1 - 5v_2)$.

   (b) Sem determinar o núcleo ou o contradomínio de T, justifique a afirmação: "T é um isomorfismo."

   (c) Determine uma base B' de V relativamente à qual T seja representada por uma matriz diagonal.

   (d) Escreva a matriz que representa T^4 relativamente à base B'.

2. Seja F um subespaço de um espaço vectorial V com produto interno. Como sabe, define-se o complemento ortogonal de F como sendo

$$F^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ para todo o } u \in F\}.$$

   (a) Prove que $F^{\perp}$ é um subespaço de V.

   (b) Calcule o complemento ortogonal do subespaço de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & d & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Seja V um espaço vectorial de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Se $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^2)$, então $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T^2)$.

   (b) Se $\{v_1, v_2\}$ for uma base ortogonal de um espaço vectorial real com produto interno, então

$$\|3v_1 + v_2\|^2 = 9\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 .$$