Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciatura em Matemática

1 de Julho de 2010 Duração: 2h30

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere os seguintes subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;:\; a-b=c \right\} \quad \text{e} \quad G = \left\{ \begin{bmatrix} e & -e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;:\; e \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Mostre que F é de facto um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (b) Determine uma base e indique a dimensão de F.

   (c) Mostre que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = F + G$. Ter-se-á $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = F \oplus G$?

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Sejam $v_1, \ldots, v_k$ vectores não nulos dois a dois ortogonais de um espaço vectorial real com produto interno. Então $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.

   (b) Seja F o subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com base ortogonal $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Então a projecção ortogonal de $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre F é $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Seja V um espaço vectorial real com base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Seja $T : V \longrightarrow V$ a transformação linear definida por $T(v_1) = v_1 + 2v_3$, $T(v_2) = v_2 + 2v_3$ e $T(v_3) = 5v_3$.

   (a) Sem efectuar cálculos, indique um valor próprio de T.

   (b) Escreva a matriz de T na base B.

   (c) Averigue se o vector $v_1 + v_2 + v_3$ pertence ao contradomínio de T.

   (d) Será T injectiva?

   (e) Diga se existe alguma base de V relativamente à qual T seja representada por uma matriz diagonal. Em caso afirmativo, construa uma tal base e escreva essa matriz diagonal.

4. Seja F um subespaço de dimensão $m < n$ de um espaço V de dimensão n. Mostre que:

   (a) Existe uma base de V que contém exactamente m vectores de F;

   (b) Existe uma base de V que não contém nenhum vector de F.