Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica II
Licenciatura em Matemática

7 de Junho de 2010 Duração: 2h30

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}_3[\lambda]$

$$F = \left\{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 \ : \ a_0 - 2a_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2 - a_3 = 0\right\}.$$

   (a) Mostre que F é subespaço de $\mathbb{R}_3[\lambda]$.
   (b) Determine uma base e indique a dimensão de F.
   (c) Construa uma base de $\mathbb{R}_3[\lambda]$ que contenha a base de F determinada na alínea anterior.
   (d) Determine um subespaço G de $\mathbb{R}_3[\lambda]$ tal que $\mathbb{R}_3[\lambda] = F \oplus G$.

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando de forma breve, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Sejam λ_1 e λ_2 valores próprios distintos de uma matriz A. Se v_1 for um vector próprio de A associado a λ_1 e v_2 um vector próprio de A associado a λ_2, então v_1 e v_2 são linearmente independentes.
   (b) Seja V um espaço vectorial de dimensão n e F um subespaço de V. Se F for gerado por p vectores, então $p \leq n$.

3. Seja V um espaço vectorial real com um produto interno e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base ortogonal de V. Seja $T : V \longrightarrow V$ a transformação linear cuja matriz relativamente à base B é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Sem efectuar cálculos, diga se T é injectiva. E sobrejectiva?
   (b) Determine o núcleo de T e a sua dimensão.
   (c) Determine o subespaço imagem de T e a sua dimensão.
   (d) Mostre que o subespaço imagem de T é o complemento ortogonal do núcleo de T.
   (e) Diga se existe alguma base de V relativamente à qual T seja representada por uma matriz diagonal. Em caso afirmativo, construa uma tal base e escreva essa matriz.

4. Sejam V e W espaços vectoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$.

   (a) Mostre que qualquer conjunto de vectores linearmente independentes de V está contido numa base de V.
   (b) Suponha que F e G são subespaços de V e W, respectivamente, satisfazendo

$$\dim F + \dim G = \dim V.$$

   Construa uma aplicação linear $T : V \longrightarrow W$ de tal modo que $\mathrm{Ker}(T) = F$ e $\mathrm{Im}(T) = G$. (Justifique a sua resposta.)