Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra Comutativa

6/2/2009 Duração: 2h 30m

1. (a) Defina domínio euclidiano.
   (b) Prove que todo o domínio euclidiano é um domínio de ideais principais.
   (c) Determine um máximo divisor comum entre $p(x) = 3x^3 + x^2 - x + 1$ e $q(x) = 3x^2 + x - 2$ no domínio euclidiano $\mathbb{Q}[x]$.
   (d) O ideal de $\mathbb{Q}[x]$ gerado por $p(x)$ e $q(x)$ é principal. Indique, justificando, um seu gerador.

2. Seja R um anel com identidade e M um $R-$módulo.
   (a) Diga o que significa M ser um R-módulo livre.
   (b) Sejam $m_1, \ldots, m_n$ elementos de M. Prove que as três afirmações seguintes são equivalentes:
      i. O conjunto $\{m_1, \ldots, m_n\}$ gera M livremente.
      ii. O conjunto $\{m_1, \ldots, m_n\}$ gera M e é linearmente independente.
      iii. Todo o elemento m de M tem expressão única da forma $m = r_1m_1 + \ldots + r_nm_n$, com $r_1, \ldots, r_n \in R$.

3. (a) Decomponha o $\mathbb{Z}-$módulo $M = \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{198}$
      i. nas suas componentes primárias;
      ii. como soma directa de módulos indecomponíveis;
      iii. como uma soma directa $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_s$, onde M_i é um módulo cíclico não trivial com ordem d_i, $i = 1, \ldots s$, com $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_s$.
   (b) Qual a sequência de invariantes de torsão de M?

4. Seja $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$. Determine todas as possíveis formas normais de Jordan de f em cada uma das seguintes situações:
   (a) O seu polinómio mínimo é $(x-5)^3$ e $n = 6$.
   (b) O seu polinómio característico é $(x-5)^3(x-3)^2$, o seu polinómio mínimo é $(x-5)^2(x-3)$ e $n = 5$.

5. Seja M um módulo cíclico com torsão sobre um domínio de ideais principais R.
   (a) Descreva os submódulos de M e prove que estes são em número finito.
   (b) Mostre que todo o módulo quociente de M é isomorfo a um submódulo de M.