Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Frequência de Álgebra Comutativa

20/1/2009 Duração: 1h 30m

1. Seja R um domínio de integridade e M um $R-$módulo não nulo.
   (a) Diga o que significa $m \in M$ ser um elemento com torsão.
   (b) Designe por T o conjunto dos elementos com torsão de M.
      i. Prove que T é um submódulo de M.
      ii. Mostre que M/T é um $R-$módulo sem torsão.

2. Seja $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^5)$. Determine todas as possíveis formas normais de Jordan de f, sabendo que o seu polinómio característico é
$$(x-4)^3(x-5)^2\,.$$

3. Seja R um domínio de ideais principais e p um primo de R. Seja M um R-módulo finitamente gerado tal que $p^{\alpha}M=\{0\}$. Suponha que x é um elemento de M com ordem p^{α}. Mostre que $M=N\oplus Rx$, para algum submódulo N de M.

   Sugestão: Seja $M=Rx_1\oplus\cdots\oplus Rx_t$, onde x_i tem ordem p^{α_i} e $\alpha_1\leq\cdots\leq\alpha_t$. Mostre que $\alpha=\alpha_t$. Escreva $x=\sum_{i=1}^{t} r_i x_i$, com $r_i\in R$, e mostre que m.d.c.$(r_l,p)=[1]$, para algum l tal que $\alpha=\alpha_l$. Faça $N=\sum_{j\neq l} Rx_j$.