Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Comutativa – Ano lectivo 2010/11

Frequência 17 de Dezembro de 2010

1. (a) Seja R um domínio de ideais principais. Seja M um R-módulo finitamente gerado livre com dimensão n e seja W um submódulo de M. Prove que existe uma base $\{y_1, \cdots, y_n\}$ de M e elementos de R não nulos $a_1, \cdots, a_k$, com $a_1 | \cdots | a_k$, tais que $\{a_1 y_1, \cdots, a_k y_k\}$ é uma base de W.

   (b) Seja W o submódulo de $\mathbb{Z}^3$ gerado por $(1, 5, 3)$ e $(7, 3, 15)$. Ache uma base $\{y_1, y_2, y_3\}$ de $\mathbb{Z}^3$ e inteiros positivos a_1 e a_2, com $a_1 | a_2$, tais que $\{a_1 y_1, a_2 y_2\}$ seja uma base de W.

2. (a) Sejam W e U submódulos de um módulo M. Se $M = W \oplus U$, prove que $M/W \cong U$.

   (b) Um submódulo W de um módulo M diz-se complementado se existir um submódulo U de M tal que $M = W \oplus U$. Sendo R um domínio de ideais principais e M um R-módulo finitamente gerado livre, mostre que as seguintes três condições a respeito de um submódulo W de M são equivalentes:

      i. W é complementado.

      ii. M/W é livre.

      iii. Para $x \in M$ e $0 \neq a \in R$, tem-se que $ax \in W \Rightarrow x \in W$.

   (c) Dê um exemplo de um submódulo de $\mathbb{Z}$ que não seja complementado.

   (d) Se R for um corpo, o que é que pode dizer sobre a situação analisada na alínea b)?

3. Determine, a menos de isomorfismo, todos os grupos abelianos de ordem 360.

4. Seja $\alpha : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um endomorfismo do espaço vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ com polinómio característico $(x-4)^3(x-5)^2$.

   (a) Determine todas as formas canónicas racionais possíveis para α.

   (b) Determine todas as formas normais de Jordan possíveis para α.