Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Álgebra Comutativa – Ano lectivo 2010/11

Teste 2 11 de Novembro de 2010

Nome:

1. Sejam $R$ e $S$ anéis comutativos com 1 e $\varphi : R \to S$ uma função.

   (a) Mostre que, para todo o $S$-módulo $M$, $r\,m := \varphi(r)\,m$, para $m \in M$ e $r \in R$, define uma estrutura de $R$-módulo em $M$ se, e só se, $\varphi$ é um homomorfismo de anéis que preserva 1.

   (b) Suponha que $S$ é um domínio de integridade. Caracterize os homomorfismos $\varphi$ que tornam $S$ um $R$-módulo sem torsão.

2. Seja $R$ um anel comutativo com 1, e seja $M$ um $R$-módulo.

   (a) Diga o que significa $M$ *é soma directa interna de* $M_1, \cdots, M_n$.

   (b) Seja $M$ soma directa interna de $M_1, \cdots, M_n$. Para cada $i = 1, \cdots, n$, seja $N_i$ um submódulo de $M_i$, e seja $N = \Sigma_{i=1}^n N_i$. Prove que, se $\nu : M \to M/N$ é o homomorfismo canónico, $x \mapsto x + N$, então

   $$M/N = \nu(M) = \nu(M_1) \oplus \cdots \oplus \nu(M_n),$$

   e $\nu(M_i) \cong M_i/N_i$, para $i = 1, \cdots, n$.

3. Para a matriz $\begin{bmatrix} 1-x & 1+x & x \\ x & 1-x & 1 \\ 1+x & 2x & 1 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{Q}[x]$, calcule a matriz dos factores invariantes.