

Atenção: Indique de forma clara, na página de rosto da folha de prova, qual a lista de números aleatórios que lhe foi entregue. De todas as vezes que tiver necessidade de utilizar essa lista, indique na sua prova qual o número que leu. A lista deve ser consultada da esquerda para a direita e de cima para baixo.

1. Na população $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ definimos o seguinte plano de amostragem:

S	(4)	(2)	(1, 4)	(1, 2)	(1, 3)	(3, 4)	(3, 2)	(3, 1)
P	0.187	0.085	0.121	0.120	0.126	0.097	0.079	0.185

Admita que $\mathbf{Y} = (-1, 15, 0, 10)$.

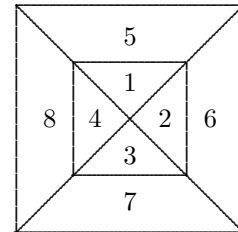
- Utilize a lista de números aleatórios para seleccionar uma amostra de acordo com o plano descrito.
 - Indique estimativas para o total da população e para a variância associada a essa estimativa. São não enviesadas?
 - Estime a variância da população $\sigma_{\mathbf{Y}}^2$.
 - Sabemos que as unidades 1 e 3 contêm pouca informação para a determinação do total da população. Assim decide-se associar a cada unidade um peso $c(i)$ e construir um estimador ℓ_1 em que cada Y_i é multiplicado pelo correspondente peso $c(i)$. Isto é, $\ell_1(s, \mathbf{Y}) = \sum_{i \in s} c(i)Y_i$. Os pesos a associar às unidades são: $c(1) = 1$, $c(2) = 10$, $c(3) = 1$ e $c(4) = 10$. Justifique que ℓ_1 é enviesado para o total da população e altere os coeficientes de cada Y_i , multiplicando cada um deles pela quantidade adequada, por forma a obter um estimador ℓ_2 , da forma $\ell_2(s, \mathbf{Y}) = \sum_{i \in s} c^*(i)Y_i$, que seja não enviesado para o total da população.
 - Caracterize a versão reduzida do plano de amostragem.
 - Construa a versão simetrizada do estimador ℓ_1 definido na alínea (d).
2. Considere-se uma população de tamanho $N = 2M + 1$. Para construir uma amostra proceda-se da seguinte forma:

- escolhe-se $m < M$ e executa-se um SRS(M, m) para obter uma amostra $s_1 = (i_1, \dots, i_m)$ sobre as unidades $\{1, \dots, M\}$;
- faz-se $\tilde{s} = (i_1, \dots, i_m, N - i_1, \dots, N - i_m)$;
- com probabilidade 0.5 toma-se a amostra $s = \tilde{s}$ ou a amostra $s = \tilde{s} \cup \{M + 1\}$.

- Caracterize a probabilidade de escolher cada uma das amostras do suporte deste plano de amostragem.
- Caracterize as probabilidades de inclusão de primeira e segunda ordens.
- O plano permite a estimação de forma não enviesada da variância da população? Justifique.
- Qual o tamanho médio de amostra para este plano de amostragem?

3. Para ter uma estimativa do consumo eléctrico no concelho de Coimbra seleccionaram-se, ao acaso as seguintes seis freguesias: Vil de Matos, S. João do Campo, Ameal, Cernache, Ceira e S. Bartolomeu. O número de endereços existentes nestas freguesias é 311, 824, 590, 1549, 1827 e 613, respectivamente. O número de endereços que foram efectivamente medidos naquelas freguesias foi 20, 35, 30, 60, 65 e 30, respectivamente. Os totais de consumo eléctrico nas amostras em cada uma das seis freguesias foi 762.88, 1398.85, 1445.01, 2310.91, 2394.84 e 576.36, sendo as variância amostrais em cada uma das freguesias 166.2830, 314.4574, 493.5400, 214.8600, 177.3682 e 186.8227. Construa uma estimativa para o total do consumo eléctrico no concelho de Coimbra e indique um intervalo com confiança 95% para este valor.

4. Uma região tem a forma de um quadrado e está dividida em sub-regiões conforme se indica na figura ao lado. Pretende-se efectuar uma amostragem em que se escolhem, ao acaso, cinco destes sub-regiões, sendo duas delas escolhidas entre as quatro sub-regiões interiores e as outras três entre as quatro sub-regiões exteriores.



- (a) Utilize a lista de números aleatórios para seleccionar uma amostra de acordo com o procedimento descrito.
- (b) Admita que o vector observado, correspondente às quatro unidades que seleccionou, é $(2, 3, 8, 8, 9)$, onde as duas primeiras observações dizem respeito às sub-regiões interiores. Construa uma aproximação não enviesada para a média da população.
- (c) Construa uma aproximação para a variância do estimador utilizado na alínea anterior e um intervalo com confiança 95% para o valor da média da população.
5. Pretende-se efectuar um IIPS sobre uma população com 4 unidades escolhendo uma amostra de tamanho 2. Indique, em cada situação seguinte, e caso seja possível, um estimador não enviesado para o total da população admitindo que $\mathbf{Y} = (21, 12, 32, 23)$. Justifique as suas respostas.

(a) $\mathbf{p} = (0.213, 0.303, 0.366, 0.118)$, $s = (1, 3)$.

(b) $\mathbf{p} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$, $s = (2, 3)$.