

**Atenção:** Indique de forma clara, na página de rosto da folha de prova, qual a lista de números aleatórios que lhe foi entregue. De todas as vezes que tiver necessidade de utilizar essa lista, indique na sua prova qual o número que leu. A lista deve ser consultada da esquerda para a direita e de cima para baixo.

1. Considere-se o seguinte plano de amostragem na população  $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Suponha-se que  $\mathbf{Y} = (20, 14, 2, 16, 1)$ .

$S$	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,3,4)	(1,4,5)	(2,4,5)
$P$	0.65	0.25	0.05	0.03	0.02

- (a) Calcule as probabilidades de inclusão de primeira e segunda ordens.
- (b) Utilize a lista de números aleatórios para escolher uma amostra. Explícite todos os procedimentos que utilizar.
- (c) Construa uma estimativa para o total da população, utilizando o estimador de Horvitz-Thompson e indique uma estimativa para a variância que lhe está associada.
- (d) O estimador que utilizou para construir a estimativa para a variância que indicou na alínea anterior é não enviesado? Justifique.
- (e) Construa um estimador não enviesado para o total da população tal que: se escolhermos a amostra (1, 2, 4) o coeficiente de  $Y_1$  é 1; se escolhermos a amostra (1, 2, 5) o coeficiente de  $Y_2$  é 2; se a amostra for (1, 3, 4) o coeficiente de  $Y_3$  é 4; se a amostra for (1, 4, 5) o coeficiente de  $Y_4$  é 1; se a amostra for (2, 4, 5) o coeficiente de  $Y_5$  é 4.
- (f) A partir da amostra escolhida em (b), utilize o estimador da alínea anterior para construir uma estimativa para o total da população.
- (g) Das duas estimativas construídas nas alíneas anteriores qual lhe parece ser a mais fiável? Justifique a sua escolha convenientemente.
2. Uma sondagem de opinião típica inclui 1000 pessoas escolhidas ao acaso entre a população toda. Imagine que a população sobre a qual se faz a amostragem contém 8 milhões de pessoas, entre as quais o Sr. X.
- (a) Qual a probabilidade de, ao seleccionar uma amostra o Sr. X ser incluído nessa amostra?
- (b) Se escolhermos 100 amostras como as referidas acima, independentemente umas das outras, qual a probabilidade de o Sr. X não ser incluído em nenhuma dessas 100 amostras?
3. Uma população está dividida em 6 grupos  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_6$ . O número de unidades em cada grupo é 400, 30, 61, 18, 70 e 120, respectivamente, perfazendo um total de 699 unidades na população. Procedeu-se a uma amostragem estratificada para encontrar os seguintes valores médios por estrato: 23.1, 19.2, 26.8, 39.7, 22.9 e 23.5, respectivamente. As variâncias amostrais são: 9.6, 17.3, 15.4, 16.3, 11.2 e 7.8. A amostra completa tem 200 unidades.
- (a) Imagine que se procedeu a uma estratificação proporcional. Construa uma aproximação para a média da população e um intervalo com confiança 95% para este valor.
- (b) Sabe-se agora que as variâncias nos estratos 1 e 6 (os dois maiores) são iguais entre si, que as variâncias nos estratos 2 a 5 são iguais entre si, e que as variâncias dos estratos 1 e 6 são iguais a um terço das variâncias em cada um dos outros estratos. Se a estratificação tiver tido esta informação em conta, o que se altera na resposta indicada na alínea anterior?

4. Uma população esta dividida da seguinte forma  $\mathcal{U} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ . Cada  $\mathcal{C}_i$  subdivide-se ainda em  $\mathcal{C}_i = \mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i$ . Para recolher uma amostra procede-se da seguinte forma:

- escolhem-se dois dos conjuntos  $\mathcal{C}_i$  de acordo com o seguinte plano de amostragem:

$s$	$(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3)$	$(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_4)$	$(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4)$	$(\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4)$
$P(s)$	0.2	0.4	0.1	0.3

- caso  $\mathcal{C}_i$  esteja incluído na amostra, escolhemos  $A_i$  com probabilidade 0.4 e  $B_i$  com probabilidade 0.6;
- para cada um dos conjuntos  $A_i$  ou  $B_i$  seleccionados acima executa-se uma amostragem aleatória simples para escolher 4 unidades.

A amostra final terá assim 8 unidades.

- Justifique que o plano de amostragem descrito é uma amostragem por grupos em dois passos.
- Descreva o plano de amostragem que descreve a escolha de conjuntos  $\mathcal{A}_i$  ou  $\mathcal{B}_j$ .
- Utilize a lista de números aleatórios para proceder à escolha correspondente aos dois primeiros passos do procedimento de construção da amostra, isto é, escolha os conjuntos  $A_i$  e  $B_j$  a incluir na amostra. (Nota: Caso não responda a esta alínea, assuma que se escolheram os conjuntos  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_3$ .)
- O número de unidades nos conjuntos  $\mathcal{A}_i$  e  $\mathcal{B}_j$  é o que se descreve abaixo:

$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{B}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{A}_4$	$\mathcal{B}_4$
20	35	15	25	15	30	20	25

Assuma que para a amostra que foi seleccionada as respostas médias e respectivas variâncias nos conjuntos considerados são:

	Conj. 1	Conj. 2
média	23.4	12.5
variância	25.1	15.2

Calcule uma aproximação para o total da população e para a variância que está associada a esta estimativa.