UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Análise Complexa I

Exame 20/06/2001 **Duração: 2 h 30**

Esta prova consta de três partes:

A **PARTE I** pretende averiguar se o aluno atingiu os objectivos mínimos da disciplina. Para tal, deve responder correctamente a pelo menos 70% das questões. Por favor, utilize o caderno suplementar para resolução da Parte I.

A **PARTE II** é de questões de *escolha múltipla*. As respostas a esta parte serão dadas apenas na primeira folha da prova. Deverá escrever **unicamente** a letra correspondente à resposta correcta entre as cinco alternativas indicadas no enunciado.

A **PARTE III** é constituída por 5 questões. Seja claro e sucinto. Soluções que revelem erros graves não serão cotadas.

PARTE I

1. Defina $\log(-1)$.
2. Escreva a equação de uma elipse em notação complexa.
3. Indique onde é que função $f(z) = \operatorname{sen}\bar{z}$ é diferenciável.
4. Indique o valor de $\int_C (6z^3 + 8iz)\mathrm{d}z$, quando C é o segmento de recta da origem para $(1, 2)$.
5. Indique o valor de $\int_C \frac{e^z}{z^2}\mathrm{d}z$ quando C é a circunferência de raio 2 centrada na origem
6. A função $\cos z$ é limitada em $\mathbb{C}$? Justifique.
7. Desenvolva $1/z^2$ em série de Laurent em torno da origem.
8. Desenvolva em série de Taylor $1/z^2$ em torno de -1.
9. Indique o valor lógico da afirmação seguinte:

$$\text{Se } c_1 + ic_2 = d_1 + id_2, \quad c_1, d_1, c_2, d_2 \in \mathbb{C}, \text{então } c_1 = d_1, c_2 = d_2,$$

apresentando um contra-exemplo no caso se ser falsa.

10. Calcule o valor principal de $(1+i)^{2i}$.
11. Quando diz que uma função complexa de variável complexa é analítica num ponto a do seu domínio?
12. Defina $\operatorname{cotg} z$.

PARTE II

1. A função complexa de variável complexa definida por $f(z) = \sin\bar{z}$

(A) é analítica em $\mathbb{C}$;
(B) é analítica na origem;
(C) é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
(D) não é analítica em ponto algum de $\mathbb{C}$.

(E) nenhuma das anteriores opções está correcta;

2. Na origem, a função $f(z) = z^2 \text{cotg} z$

(A) é holomorfa;

(B) tem uma singularidade removível;

(C) tem uma singularidade essencial;

(D) tem um polo simples;

(E) nenhuma das anteriores opções está correcta.

3. O raio do desenvolvimento em série de Taylor de $\frac{1}{z+1}$ em torno de i é

(A) 2;

(B) 1;

(C) $\sqrt{2}$;

(D) 1/2;

(E) nenhuma das anteriores opções está correcta.

PARTE III

1. Represente geometricamente a imagem pela transformação $f(z) = \frac{1}{z-1}$ do domínio plano caracterizado por $\Im z < 0$.

2. Considere a transformação $f(z) = \text{Log} z$ (ramo principal).

(a) Averigue se a transformação é conforme no conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z| < 1; \ \Im z > 0\}.$$

(b) Determine $f(A)$.

3. Utilizando Teoria dos Resíduos calcule o valor do integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xdx}{x^2+1}.$$

4. Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando devidamente (cada justificação **não poderá** exceder 10 linhas). No caso de afirmações falsas, apresente um contra-exemplo.

(a) O valor máximo do módulo da função definida por $f(z) = e^{z^3}$ no disco unitário fechado é e.

(b) Seja f uma função inteira tal que $f(0) = 0$ e $f(i) = i$. Não existe M real e positivo tal que $|f(z)| < M, \forall z \in \mathbb{C}$.

(c) O domínio de convergência da série $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2+i)^{n+1}}$ é $|z-i| < \sqrt{5}$.

5. Seja f uma função inteira e suponha que existe uma constante M, um $R > 0$ e um inteiro $n \geq 1$ tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| > R$. Prove que f é uma função polinomial de grau $\leq n$.