UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

## Análise Complexa I

**Exame 16/7/2001** **Duração: 2 h 30**

**Esta prova consta de três partes:** A **PARTE I** pretende averiguar se o aluno atingiu os objectivos mínimos da disciplina. Para tal, deve responder correctamente a pelo menos 60% das questões. Por favor, **utilize** o caderno suplementar para resolução da Parte I.

A **PARTE II** é de questões de *escolha múltipla*. As respostas devem ser dadas na primeira folha da prova, escrevendo **unicamente** a letra correspondente à resposta correcta entre as cinco alternativas indicadas no enunciado.

A **PARTE III** é constituída por 5 questões. Seja claro e sucinto.

Soluções que revelem erros graves não serão cotadas.

## PARTE I

1. Indique uma equação que represente rectas e circunferências no plano complexo.

2. Determine a imagem de rectas e circunferências pela transformação $z \to \frac{1}{z}$, apresentando a equação em coordenadas no plano-$w$.

3. Determine as raízes cúbicas de $\sqrt{3}+i$.

4. Desenvolva $e^{-z}$ em série de potências de $z-1$.

5. Calcule o resíduo de $\frac{1}{e^z(z-1)^3}$ no ponto $z=1$.

6. Escreva a desigualdade triangular para complexos. Qual a condição necessária e suficiente para a ocorrência de igualdade?

7. Enuncie uma condição necessária e uma condição suficiente para a existência de derivada de uma função complexa de variável complexa num ponto do seu domínio.

8. Defina função complexa periódica. Qual é o período da função $f(z) = e^{2\pi z}$?

9. Averigue se a sucessão $z_n = (\pi + \frac{1}{n})e^{(-1)^n i(\pi+\frac{1}{n})}$ é convergente.

10. Defina índice de uma curva fechada relativamente a um ponto que lhe não pertence.

11. Indique o valor lógico da afirmação seguinte, justificando:

"A função $z^{\frac{1}{2}}$, definida em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, é analítica."

12. Sejam $A=(-1,1)$ e $B=(2,2)$. Considere os integrais $I_1 = \int_{C_1}\frac{1}{z-i}dz$ e $I_2 = \int_{C_2}\frac{1}{z-i}dz$, onde $C_1$ e $C_2$ são curvas simples que ligam $A$ a $B$ e intersectam o eixo imaginário no mesmo ponto. Poder-se-á concluir que $I_1 = I_2$?

## PARTE II

1. Seja $T$ o triângulo de vértices $(0,7)$, $(-1/2,-2)$ e $(-1/2,2)$. O valor do integral

$$\int_T \frac{\mathrm{Log}(z+1)}{(z^2+1)}dz$$

é: **(A)** 0;

(B) $2\pi i$;
(C) $i$;
(D) Log(1 + i);
(E) nenhuma das anteriores opções está correcta.

2. Seja $T$ o triângulo de vértices $(7,0)$, $(-1/2,-2)$ e $(-1/2,2)$. O valor do integral

$$\int_T \frac{\text{Log}(z+1)}{(z^2+1)}dz$$

é: (A) 0;
(B) $2\pi i$;
(C) $i$;
(D) Log(1 + i);
(E) nenhuma das anteriores opções está correcta.

3. A função definida por $f(z) = x^2 + x + y + i(y^2 - 5y - x)$ é
(A) analítica no plano complexo;
(B) analítica nos pontos da recta $y = x + 3$;
(C) diferenciável nos pontos da recta $y = x + 3$, mas não é analítica em ponto algum;
(D) analítica apenas na origem;
(E) nenhuma das anteriores opções está correcta.

## PARTE III

1. a) Sejam $a$ e $b$ complexos fixos. Usando argumentos geomátricos, caracterize o conjunto dos complexos $z$ que satisfazem a condição

$$|z-a| = |z-b|.$$

Considere a equação $(z-1)^8 = z^8$.
b) Quantas raízes possui?
c) Sem resolver a equação, prove que as suas raízes estão sobre a recta $\Re z = 1/2$.
d) Efectuando a mudança de variável $1 - 1/z = w$, resolva a equação.

2. Determine o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

3. Considere a transformação $f(z) = sinz$.
(a) Averigue se a transformação é conforme no conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \quad \Re z \in (-\pi/2, \pi/2)\}.$$

(b) Determine $f(A)$.

4. Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando devidamente (cada justificação **não poderá** exceder 10 linhas):

a) Se $f(z)$ é uma função inteira não constante, então $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

b) É válida a seguinte igualdade (supondo os caminhos descritos no mesmo sentido):

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-i} dz = \int_{|z-i|+|z+i|=3} \frac{1}{z-i} dz.$$

5. Seja $f(z)$ um polinómio de grau $n$ e seja $R > 0$ suficientemente grande de tal modo que $f(z)$ nunca se anula em $\{z : |z| > R\}$. Se $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, mostre que $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i n$.