UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Análise Complexa

Exame 20/06/2002 **Duração: 2 horas 30 minutos**

Esta prova consta de três partes: A **PARTE I** pretende averiguar se o aluno atingiu os objectivos mínimos da disciplina. Para tal, deve responder correctamente a pelo menos 60% das questões. Por favor, **utilize** o caderno suplementar para resolução da Parte I.

A **PARTE II** é de questões de *escolha múltipla*. As respostas devem ser dadas na primeira folha da prova, escrevendo **unicamente** a letra correspondente à resposta correcta entre as cinco alternativas indicadas no enunciado.

A **PARTE III** é constituída por 5 questões. Seja claro e sucinto.

Soluções que revelem erros graves não serão cotadas.

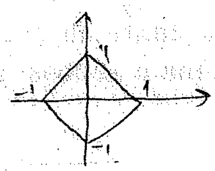
PARTE I

1. Resolva a equação $e^{iz} = e^z$. $\begin{cases} e^{-y}\cos x = e^x \cos y \\ e^{-y} \operatorname{sen} x = e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$

2. Calcule $\operatorname{tg}(-\pi i)$. $= -i\,\dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{e^{\pi} + e^{-\pi}}$

3. Represente geometricamente

$$\{z \in \mathbb{C} : |\Re z| + |\Im z| = 1\}.$$



4. Estude a natureza da sucessão complexa

$$z_n = \pi^{1/n} + i \sin \frac{1}{n}.$$ convergente p/ $\frac{1}{2}$

5. Determine os pontos de diferenciabilidade e analiticidade da função $z \to x + i \sin x \cos y$. não há nenhum pt onde haja analiticidade nem diferenciabili,

6. Calcule o resíduo de $\frac{1}{z \sin z}$ no ponto $z = 0$. $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$

7. Enuncie o Teorema da Identidade. Seja f analítica num domínio D. Se o conjunto $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ admitir um ponto de acumulação então f é identicamente nula.

PARTE II

1. O valor do raio de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2(n-1)!}$$

é:

(A) 0;
(B) 1;
(C) ∞;

(D) $1/2$;

(E) nenhuma das anteriores opções está correcta.

2. Seja T o quadrado de vértices 1, i, -1,$-i$, percorrido no sentido positivo. O valor do integral

$$\int_T \sin(z + \frac{1}{z-2})dz$$

é:

(A) 0;

(B) $2\pi i$;

(C) i;

(D) $\sin 2i$;

(E) nenhuma das anteriores opções está correcta.

3.Indique quais das afirmações seguintes são verdadeiras:

Considere a função que na origem toma o valor 0 e para $x + iy \neq 0$ é definida por $f(x+iy) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

(A) A função é analítica na origem; F

(B) A função é diferenciável na origem; F

(C) O limite de $f(z)/z$, quando z tende para 0 ao longo de $y = x$ no primeiro quadrante, é $\frac{i}{1+i}$; V

(D) O limite de $f(z)/z$, quando z tende para 0 ao longo de $x = 0$, é $1 + i$; F

(E) Uma e apenas uma das anteriores opções está correcta.

PARTE III

~~1~~. Prove que os zeros duma função analítica num domínio, não nula, são isolados.

~~2~~. Indique o valor lógico da seguinte afirmação, justificando devidamente:

A função com domínio $B_2(1+i)$ (bola fechada de centro em $1+i$ e raio 2) definida por $z \to e^{3z}$, é injectiva neste domínio. Verdade

x// 3. Considere uma transformação de Moebius T, uma circunferência C e uma recta l passando pelo centro de C. Suponha que $T(C)$ e $T(l)$ são, respectivamente, uma circunferência e uma recta. Só as rectas que passa no centro é que são diametro

Averigue se, nestas circunstâncias, $T(l)$ é diâmetro (prolongado) de $T(C)$.

~~4~~. Calcule

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z} dz. = -\frac{2\pi i}{e}$$

Suponha o caminho percorrido no sentido positivo.

~~5~~. Desenvolva a função $\frac{z+1}{e^z-1}$ em série de Laurent em torno de $z = 0$. Calcule três termos.

Classifique as suas singularidades. Singularidades Removíveis