

# UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

## Análise Complexa

Exame 24/06/2005

Duração: 2 horas 30 minutos

**Nota:** Responda de forma clara e sucinta.

Soluções com erros graves não serão cotadas.

- 1.a) Defina inversão geométrica relativa à circunferência  $|z| = 1$ .  
b) Mostre que a inversão geométrica definida em a) transforma rectas e circunferências em rectas e circunferências.

2. a) Prove que se  $w = f(z)$  é analítica, então é conforme em todos os pontos em que a derivada se não anula.

b) Considere a transformação definida nos complexos por  $w = z^2$ . Qual o ângulo entre os transformados dos eixos coordenados? Justifique.

b) Determine o transformado de  $|z - 1| = 1$  por  $w = z^2$ .

3. Enuncie e demonstre o teorema de Liouville.

4. Indique o valor lógico das seguintes proposições, justificando:

a) A derivada do logaritmo de  $z$ ,  $z \neq 0$ , é  $1/z$ .

b) Para quaisquer números complexos não-nulos  $a, b$ , tem-se

$$\text{Log}(ab) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b).$$

c) Para quaisquer números complexos não-nulos  $a, b$ , tem-se

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b).$$

d) Se  $f(z)$  e  $\overline{f(z)}$  são analíticas numa região conexa, então  $f(z)$  é constante.

e) Se  $|f(z)| \leq M$  para qualquer número complexo  $z$  e  $M$  constante, então  $f(z)$  é um polinómio cujo grau não excede  $n$ .

5. a) Calcule o valor do integral de  $1/z$  ao longo da fronteira do quadrado de vértices  $\pm 1 \pm i$ . Que valor encontra se tomar o caminho  $|z| = 1.000$  ?

b) Repita a) tomando como função integranda  $\sin z/z^5$ .

6. a) Desenvolva  $z/\exp(z)$  em série de potências de  $z$ .

b) Quais as singularidades da função? Classifique-as.