

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Análise Complexa

Exame 18/07/2005

Duração: 2 horas 30 minutos

Nota: Responda de forma clara e sucinta. Soluções com erros graves não serão cotadas.

- ✓ 1. Considere a função $f(z) = \frac{|z|}{1+|z|}$.
- ✓ a) Indique a sua parte imaginária e o seu domínio de analiticidade.
- ✓ b) Calcule $\int_{|z|=10} f(z) dz$.

- ✓ 2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = i/z$.
- ✓ a) Defina aplicação conforme.

Será f conforme no seu domínio? Justifique.

- ✓ b) Determine o transformado por f de uma recta paralela ao eixo imaginário.
- ✓ c) Determine o transformado por f do arco de circunferência $|z| = 2$ no segundo quadrante.

- ✓ 3. Calcule:
- a)

$$\int_{|z|=7} \frac{\cosh^2 z - \sinh^2 z}{z^4} dz.$$

- ✓ b)

$$\int_{|z-i|=1} \frac{e^{3z}}{z^2 + 1} dz.$$

- ✓ 4. a) Indique qual o desenvolvimento em série de Laurent de $f(z) = \cos(\frac{1}{z-1})$ em torno de $z = 1$.
- ✓ b) Classifique a singularidade da função, justificando.
- ✓ c) Qual o valor do seu resíduo em $z = 1$?

- ✓ 5. Indique o valor lógico das seguintes proposições, justificando:

- ✓ a) Se f é uma função inteira cujo contradomínio está contido no disco unitário, então f é constante.
- ✓ b) Se f é uma função inteira tal que $f(0) = 0$ e $f(i) = i$, então f não é limitada.
- ✓ c) $z^{1/2}$ é analítica em \mathbb{C} .
- ✓ d) O domínio de analiticidade de $z^{1/2}$ coincide com o do logaritmo de z .

- ✓ 6. a) Caracterize os zeros de uma função analítica. Prove a sua afirmação.

b) Considere uma função complexa f , analítica no disco unitário D e tal que $f(1 - 1/n) = 0$ para n natural. Poderá f assumir valores não nulos em D ? Justifique.

2 b)
6 b)

5 c) f
a) -

$$\cos h^2 t - \sin h^2 t = 1$$