

# UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

## Análise Complexa

Frequência 28/04/2005

Duração: 1 hora 30 minutos

Nota: Responda de forma clara e sucinta.

Soluções com erros graves não serão cotadas.

1. Mostre que uma <sup>imersão geométrica</sup> transformação de Möbius transforma rectas e circunferências em rectas e circunferências.

2. a) Defina aplicação conforme.

b) Prove que se  $w = f(z)$  é analítica, então é conforme em todos os pontos em que a derivada se não anula.

3. Indique onde é que a função

$$f(r, \theta) = r \exp(r \cos \theta) \exp(i(\theta + r \cos \theta))$$

é analítica.

4. a) Defina *ramo principal* ou *valor principal* do logaritmo.

b) Indique os valores lógicos das seguintes proposições, justificando:

Para quaisquer números reais não-nulos  $a, b$  tem-se

$$\text{Log}(ab) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b).$$

Para quaisquer números reais não-nulos  $a, b$  tem-se

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b).$$

c) Indique qual o valor de  $\text{Log}(-\sqrt{3} - i)$ .

5. Calcule o valor do integral de  $1/z$  ao longo da fronteira do quadrado de vértices  $\pm 1 \pm i$ . Utilize a definição.

Rafael

Xama

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de Matemática

Análise Complexa

2ª Frequência

~~Exame~~ 24/06/2005

Duração: 2 horas 30 minutos

Nota: Responda de forma clara e sucinta.

Soluções com erros graves não serão cotadas.

1. a) Defina singularidade isolada.  
b) Defina cada um dos possíveis tipos de singularidade isolada.
2. Enuncie e ~~demonstre~~ o Teorema dos Resíduos.
3. Indique o valor lógico das seguintes proposições, justificando:  
a) Os zeros de uma função analítica não-constante são isolados. ✓  
b) Se  $|f(z)| \leq M$  para qualquer número complexo  $z$  e  $M$  constante, então  $f(z)$  é um polinómio cujo grau não excede  $n$ . ✓
4. Enuncie e demonstre o teorema de Liouville.  
5. a) Calcule o valor do integral de  $1/z$  ao longo da fronteira do quadrado de vértices  $\pm 1 \pm i$ . Que valor encontra se tomar o caminho  $|z| = 1.000$ ?  
b) Repita a) tomando como função integranda  $\sin z/z^5$ .
6. a) Desenvolva  $z/\exp(z)$  em série de potências de  $z$ .  
b) Quais as singularidades da função? Classifique-as.

na 10  
paka  
fo 30K

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m + \dots$$
$$= z^m (a_m + a_{m+1} z + \dots)$$

2 0