**Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra**

**Análise Complexa I**

**Exame 19/06/2007** **Duração: 2 horas 30 minutos**

**Nota:** Responda de forma clara e sucinta.
Soluções com erros graves não serão cotadas.

(4 val.) 1. a) Represente geometricamente as raízes de índice 3 de $\sqrt{3} - i$;
b) Escreva na forma algébrica $\cos i\pi$.
c) Resolva a equação $\operatorname{sh} iz = -i$.

(2 val.) 2. Sendo f uma função complexa definida num aberto A, diga o que entende por:
a) f é *diferenciável* em $z \in A$;
b) f é *holomorfa* em A.

(3 val.) **3.** a) Defina logaritmo de $0 \neq z \in \mathbb{C}$ e valor principal do logaritmo.
b) Indique, justificando, o domínio de analiticidade de $f(z) = \mathrm{Log}(2+z)$.

(4 val.) 4. a) Estude a convergência uniforme da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ no conjunto $E = [-1, 1]$.
b) Enuncie e demonstre o teorema que utilizou na alínea anterior.

(4 val.) 5.a) Determine a série de Mac Laurin de $\operatorname{arctg} z$ e indique o raio de convergência.
b) Enuncie e demonstre o teorema de Taylor.

(3 val.) 6. Calcule: a)

$$\int_0^i z \cos z \,\mathrm{d}z;$$

b)

$$\int_{|z|=1} z\, \Im(z^2)\,\mathrm{d}z;$$

c)

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\mathrm{d}z$$