

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Complexa I

3/06/2007

Duração: 2 horas

Nota: Responda de forma clara e sucinta.
Soluções com erros graves **não serão** cotadas.

Problema 1

Indique o valor lógico das seguintes asserções, dando uma breve explicação no caso de serem verdadeiras e um contra-exemplo se falsas:

1. Se f é analítica no disco unitário E , então existe $\alpha \in E$ tal que $|f(\alpha)| \geq |f(0)|$.
2. Se f e g são analíticas num domínio D , e se coincidem num subconjunto S não-vazio que é fechado em D , então $f = g$ em D .
3. Se f é inteira, o seu limite quando $z \rightarrow \infty$ existe sempre.
4. Se $\sum_n a_n z^n$ tem raio de convergência R , então $\sum_n (\Re a_n) z^n$ tem raio de convergência $\geq R$.

Problema 2

1. Enuncie e demonstre o Teorema de Cauchy (versão fraca).
2. Enuncie e demonstre o Teorema Fundamental do Cálculo Integral para a função complexa.

Problema 3

Calcule os seguintes integrais:

1.
$$\int_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{z-1} dz;$$

2.
$$\int_{|z|=2} \frac{\text{Log}(z-7)}{z^2-2z+1} dz;$$

3.
$$\int_{|z|=1} \frac{\text{ch}(z)}{z^2} dz;$$

Problema 4

Desenvolva $\frac{1}{z^2-1}$ em série de Taylor em torno da origem e determine o raio de convergência.