Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Complexa

16/03/2009 **Duração: 1 hora 30 minutos**

Nota: Responda de forma clara e sucinta. Justifique sumariamente os procedimentos. Soluções com erros graves não serão cotadas.

1. a) Determine as partes real e imaginária de $\frac{z-a}{z+a}$ $(a \in \mathbb{R})$.

b) Calcule o conjugado de $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^{10}}$ e o módulo de $\frac{2+i\sqrt{3}}{(1-i)^4}$.

2. a) Calcule as raízes índice n da unidade.

b) Seja $z = \text{cis}\,(2\pi/\text{n})$ e $n \geq 2$ um inteiro. Mostre que $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$.

3. a) Considere a correspondência entre os pontos da esfera de Riemann S e o plano complexo ampliado definida pela projecção estereográfica. Que pontos de S correspondem a $0, 1+i, 3+2i$?

b) Que subconjuntos de S correspondem aos eixos real e imaginário de $\mathbb{C}$?

4. a) Represente geometricamente o subconjunto do plano de Argand

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \Im\left(\frac{z-a}{b}\right) < 0\right\}, \ (a, b \in \mathbb{C}).$$

b)Seja $R(z)$ uma função racional de z. Mostre que $\overline{R(z)} = R(\bar{z})$ se todos os coeficientes de $R(z)$ forem reais.

5. a) Deduza a desigualdade triangular e caracterize a ocorrência de igualdade.
b) Defina os conceitos de limite e continuidade para uma função complexa de variável complexa