Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra — 01/04/11
Frequência I — 1h30m
Análise Complexa — Licenciatura e Menor em Matemática

(3.0) 1. Resolve em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:

a) $z^3 = 2 + i\,2\sqrt{3}$.

b) $z^2 + 2\,z + 1 - i = 0$.

c) $e^z = 1 - i$.

d) $\sin z = i$.

(1.5) 2. Analisa a convergência normal e absoluta das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n+1}}$. b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(i\,n)}{3^n}$.

(2.0) 3. Considera a função de expressão analítica $f(z) = z^2$.

a) Identificando as partes real e imaginária de f determina o transformado por f de:
a.1) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi/2\}$; a.2) $\{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z = 1\}$.

b) Determina a curva em $\mathbb{C}$ cuja imagem, w, por f é a recta $\{f(z) = w \in \mathbb{C} : \Re e\, w = 1\}$.

(2.0) 4. Condições de Cauchy-Riemann.

a) Utilizando as condições de Cauchy-Riemann analisa a diferenciabilidade em $\mathbb{C}$ da função de expressão analítica $f(z) = \bar{z}^2$.

b) Seja $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável, onde G é um domínio. Mostra que as funções parte real de f e parte imaginária de f satisfazem em G as condições de Cauchy-Riemann.

(1.5) 5. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \Im m\, z\, dz$ onde γ é o arco de parábola, $y = 2\,x^2$, que vai de 0 para $1 + 2\,i$.

(4.5) 6. Considera a função $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-1)(z+2)}$.

a) Determina e classifica as singularidades isoladas de f no plano complexo estendido, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

b) Determina a decomposição em fracções simples de f.

c) Calcula o desenvolvimento em série de Laurent de f, numa região $0 < |z+2| < r$, devidamente identificada.

d) Calcula o desenvolvimento em série de Laurent de f, numa região $r < |z| < R$, com $0 < r < R < +\infty$, devidamente identificada.

(2.5) 7. Considera a função $g(z) = \dfrac{e^z}{(z+2)^3\, z}$.

a) Calcula o resíduo de g em 0 e também em -2.

b) Discute o valor do integral $\displaystyle\int_\ell g(z)\, dz$, onde ℓ é uma qualquer curva de classe C^1, simples, fechada e considerada com orientação positiva, do plano complexo.

(3.0) 8. Como aplicação do **teorema dos resíduos** calcula os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5 - 4\cos t}\, dt$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$.

(4.0) 1. a) Identifica geometricamente $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 1 - i| \leq 3\}$.

b) Descreve geometricamente as soluções da equação $2z^5 + 1 = 0$.

c) Determina a parte real e a parte imaginária da função $\exp(\exp z)$.

d) Resolve em $\mathbb{C}$ a equação $\sinh z = i/2$.

(1.5) 2. Determina a imagem do círculo $|z| = r$, com $0 < r < 1$, por $f(z) = (z + 1/z)/2$.

(3.0) 3. Considera a função de expressão analítica $u(x, y) = y^3 - 3\,x^2 y$.

a) Mostra que u é harmónica.

b) Determina a expressão analítica de uma função, v, harmónica conjugada de u.

c) Demonstra o resultado utilizado.

(1.5) 4. Calcula $\displaystyle\int_\gamma (i\,\bar{z} + z^2)\,dz$ ao longo do arco $\{z : |z| = 2 \wedge \arg z \in [\pi/2, \pi]\}$.

(3.5) 5. Considera a função $f(z) = \dfrac{2z\,i}{(1 - z)(z + i)}$.

a) Determina a decomposição em fracções simples de f.

b) Calcula o desenvolvimento em série de Laurent de f, numa região $0 < |z+i| < r$, devidamente identificada.

c) Calcula o desenvolvimento em série de Laurent de f, numa região $r < |z-i| < R$, com $0 < r < R < +\infty$, devidamente identificada.

(3.5) 6. Considera a função $g(z) = \dfrac{e^{\pi z} - 1}{(z^2 + 3z + 2)\,z^2}$.

a) Determina e classifica as singularidades isoladas de g no plano complexo estendido, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

b) Calcula o resíduo nos pólos de g.

c) Discute o valor do integral $\displaystyle\int_\ell g(z)\,dz$, onde ℓ é uma qualquer curva de classe C^1, simples, fechada e considerada com orientação positiva, na região $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| \leq 3\}$.

(3.0) 7. Como aplicação do **teorema dos resíduos** calcula os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos t)^2}\,dt$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\,dx$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 06/07/11

Exame II 2h30m

Análise Complexa LICENCIATURA E MENOR EM MATEMÁTICA

(1.5) 1. Mostra que para $u, v \in \mathbb{C}$ se tem $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Dá uma interpretação geométrica desta identidade.

(5.5) 2. Determina:

a) O lugar geométrico dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $w = \dfrac{z-1-i}{z+1+i}$ é um número imaginário puro.

b) $\log(1+i)$.

c) $(-4)^i$.

d) Os pontos singulares de $\dfrac{\tan z}{z^2+z+1}$.

e) O resíduo na origem de $\dfrac{z}{e^z-1}$.

(2.0) 3. Considera a função de expressão analítica $u(x,y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$.

a) Mostra que u é harmónica.

b) Determina a expressão analítica de uma função v harmónica conjugada de u.

(3.0) 4. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \bar{z} \,.\, z \, dz$ quando γ é o arco $\{z : |z| = 1 \wedge \arg z \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ e também quando γ é o segmento de recta $\{z : z = i\,t \wedge t \in [-1,1]\}$.

(2.0) 5. Desenvolve a função de expressão analítica $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z^3}$ em série de Laurent numa vizinhança da origem e classifica a singularidade de f nesse ponto.

(3.0) 6. Calcula, justificando convenientemente, o integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2-z+1}{z^3-z^2}\, dz$ quando ℓ é uma curva considerada com orientação positiva, definida por:

a) $|z-1| = 1/2$.

b) o triângulo de vértices i, -1, $1/2 - i$.

c) o quadrado cujos lados estão sobre as rectas $x = \pm 2$, $y = \pm 2$.

(3.0) 7. Como aplicação do **teorema dos resíduos** calcula os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{15\,\sin^2 t + 1}\, dt$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$.
