Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANALISE FUNCIONAL APLICADA

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época Normal (2h30m) **26/JUN/2007**

---

1. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert real e $L : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo não identicamente nulo. Mostre que $\dim \mathcal{N}(L)^{\perp} = 1$

2. Seja $\mathcal{H}$ um espaçp de Hilbert e $E \subset \mathcal{H}$ um subespaço linear. Considere as seguintes afirmações:

   (1) E é um subespaço denso em $\mathcal{H}$.

   (2) $\forall L \in \mathcal{H}'$, $E \subset \mathcal{N}(L) \implies L \equiv 0$.

   Pretende-se mostrar a equivalência entre (1) e (2) sem recorrer ao Teorema de Hanh-Banach:

   (a) Mostre que (1) $\implies$ (2).

   (b) Mostre que (2) $\implies$ (1) demonstrando a contra-recíproca (supondo que E não é denso, ache um elemento não nulo do seu ortogonal).

3. Mostre que se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ é um operador compacto entre espaços de Hilbert e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ é uma sucessão fracamente convergente em $\mathcal{H}$, então $(Th_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão fortemente convergente em $\mathcal{K}$.

(V.S.F.F.)

4. Considere o operador integral R: $L^2(m$ [illegible]$) \to L^2(a$ [illegible]$)$, onde a é a medida de Lebesgue em $[0,1]$, com núcleo $k(x,y) \in L^2(m \times a)$, $k \not\equiv 0$.

   (a) Mostre que $k(x,y)$ tem a forma

   $$k(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(x) e_i(y),$$

   para funções $e_i \in L^2(m)$ apropriadas e $\lambda_i \in \mathbb{R}$ com $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = 0$, e indique qual é neste caso o espectro de R.

   (b) Mostre que se R tem exactamente um valor próprio não nulo e o espaço próprio associado tem dimensão 1, então $k(x,y) = l(x)m(y)$.

5. Seja $f(x) = |x|^{-\alpha}$. Indique para que valores de a se tem $f \in W^{1,p}(B_1(0))$, onde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$ é a bola unitária e $1 \le p \le \infty$, justificando detalhadamente.

6. Mostre que se $p > d$ e $u \in W^{1,p}(U)$, onde $U \subset \mathbb{R}^d$ é aberto, então

   $$\lim_{|x| \to \infty} |u(x)| = 0.$$

   (Pode impor a U condições que ache necessárias.)