Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

ANÁLISE FUNCIONAL APLICADA

(Licenciatura em Matemática)

Exame - Época de Recurso (2h30m) **13/JUL/2007**

---

1. Seja A um subconjunto qualquer de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

   (a) Defina o **ortogonal** de A, $A^{\perp}$.

   (b) Mostre que $A^{\perp}$ é um **subespaço** fechado de $\mathcal{H}$.

   (c) Mostre que $(A^{\perp})^{\perp}$ é o menor **subespaço** fechado de $\mathcal{H}$ que contém A.

2. Seja $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{R})$ e

$$\mathcal{K} = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty \right\},$$

   com produto interno

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle_{\mathcal{K}} := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n b_n.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{K}$ com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}}$ tem injecção compacta em $\mathcal{H}$.

   (b) Dado $L \in \mathcal{H}'$, sendo $\mathcal{K}$ um **subespaço** de $\mathcal{H}$, L define **naturalmente um** funcional sobre $\mathcal{K}$. Sendo h_L o vector de $\mathcal{H}$ que representa L em $\mathcal{H}'$ (dado pelo **Teorema** de **Representação** de Riesz) e k_L o vector que representa L em $\mathcal{K}'$. Como se relaciona h_L com k_L?

(V.S.F.F.)

3. Seja $\mathbf{I} = (a,b)$ um intervalo aberto e limitado em R, e $g \in L^2(I)$ uma função estritamente positiva, isto é, $g(x) \geq \lambda$ para algum $\lambda > 0$.

   (a) Mostre que para cada função f de $L^2(I)$ existe uma e uma só função u em $H_0^1(I)$ tal que

$$\int_a^b u'\phi' + gu\phi \, dx = \int_a^b f\phi \, dx \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

   (b) Mostre que se $g \in L^\infty$, na verdade $u \in H^2(I)$ e

$$u'' = gu - f \quad \text{(no sentido fraco.)}$$

   (c) Mostre que o operador que a f associa u é um operador compacto de $L^2(I)$ $(g\ \infty)$ em $H_0^1(I)$.

   (Sugestões: Em (a) pode ser útil definir uma forma bilinear e um funcional linear apropriadaos; em (c) use resultados conhecidos de injecção compacta.)

4. Seja $U \subset B^d$ aberto, $N > 0$ e $G_N \in C(\mathbb{R})$ a função

$$G_N(s) = \begin{cases} s, & \text{se } |s| < N, \\ N, & \text{se } |s| \geq N. \end{cases}$$

   Mostre que se $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $G_n(u)$ E $W^{1,p}(U)$ calcule o seu gradiente (no sentido fraco).

5. Seja U um aberto conexo de $\mathbb{R}^d$ e $u \in W^{1,p}(U)$, $p \in [1,\infty]$, tal que

$$Du = 0 \quad \text{q.t.p. em } U.$$

   Mostre que u é constante q.t.p. em U.