DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

ANÁLISE REAL

(Licenciatura em Matemática / Mestrado em Matemática)

Exame - Época Normal (2h30m) **24/Jan/2007**

Parte I

Grupo A

1. Mostre que se μ é uma medida e $\mu(A) = 0$, então, para qualquer $B \subset A$, $\mu(B) = 0$ e B é mensurável.

2. Seja m a medida de Lebesgue em R. Admita a existência um conjunto não mensurável $S \subset R$. Mostre que se $A \subset R$ e $m(A) > 0$ então A contém um subconjunto não mensurável. (S não está à partida relacionado com A.)

3. Explique o que falha na seguinte (falsa) demonstração de que todo o subconjunto de $\mathbb{R}$ é mensurável: Seja $S \subset R$ qualquer. Como a medida de Lebesgue é regular, existe um conjunto mensurável A, $S \subset A$, tal que $m(A) = m(S)$. Então $m(A \setminus S) = 0$ e portanto $A \setminus S$ é mensurável. Mas então $S = (A \setminus S)^c \cap A$ é intersecção de conjuntos mensuráveis, logo mensurável.

Grupo B

1. Seja μ uma medida em $\mathbb{R}^d$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ uma sucessão convergente para f q.t.p. em $\mathbb{R}^d$ e tal que $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$.

   (a) Use o Teorema de Egorov para obter conjuntos A e B $\underline{A \cup B = \mathbb{R}^d}$ tais que

   $$\int_A |f|^p \, d\mu < \varepsilon \quad \text{e} \quad f_n \to f \ \text{ uniformemente em B.}$$

   (b) Aplique o Lema de Fatou a $\int_B |f_n|^p d\mu$ para concluir que

   $$\limsup \int_A |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

   (c) Conclua que $f_n \to f$ em $L^p(\mu)$.

2. Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, onde p e q são expoentes conjugados, $p \in [0, 2]$ e $q \in [2,\infty]$. Mostre que $f * g$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^d$.

Grupo C

1. Mostre que o limite fraco de uma sucessão num espaço de Banach é único.

2. Mostre que um espaço de Banach E é reflexivo se e só se $\sigma(E', E'') = \sigma^*(E', E)$. (Pode invocar todos os teoremas que demonstrámos nas aulas.)

3. Seja $T : E \to L$ um operador linear contínuo entre os espaços de Banach E e L. Definimos o ***transposto*** de T, $T' : L' \to E'$ por

$$\langle T'g, x\rangle = \langle g, Tx\rangle \quad \forall g \in L' \quad \forall x \in E.$$

   (a) Mostre que T' é um operador linear contínuo com $\|T'\| \leqslant \|T\|$. (Pode também mostrar que $\|T'\| = \|T\|$.)

   (b) Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão fracamente convergente em E, então $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão fracamente convergente em L.

$\boxed{\textbf{Parte II}}$

Grupo D

Responda apenas a uma das seguintes perguntas.

1. Seja $c_0(\mathbb{R}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) : x_n \in \mathbb{R},\ \lim_n x_n = 0\}$ munido com a norma do supremo: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_n |x_n|$. Mostre que o dual de c_0 é $\ell^1(\mathbb{R})$.

2. Mostre que para qualquer $\theta \in (0, 1)$ existe um conjunto aberto $E \subset (0, 1)$, denso em $(0, 1)$ e tal que $m(E) = \theta$.