Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Análise Real

Exame da época normal
Data: 08/01/2008
Duração: 2h30m

1. (a) Justifique a seguinte afirmação:

   Em $\mathbb{R}$, os borelianos são os conjuntos que podem ser obtidos, a partir dos intervalos, por reuniões, intersecções e diferenças numeráveis.

   (b) Prove que os borelianos são Lebesgue-mensuráveis.

2. Seja μ uma medida de Radon, em $\mathbb{R}^n$. Diga, justificando convenientemente, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

   Qualquer conjunto μ-mensurável é a reunião de um boreliano com um conjunto de medida nula.

   Sugestão: Tenha em consideração o Teorema I.18.

3. Determine o integral de Lebesgue, sobre o intervalo $]0, +\infty[$, das funções

   (a) $f(x) = e^{-[x]}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{[x]!}$ (nas duas alíneas desta pergunta, $[x]$ designa a parte inteira de x).

4. Se $|f(x)| \leq M$ a.e. em A e $\mu(A) < +\infty$, prove que $|\int_A f(x) d\mu| \leq M\mu(A)$.

5. Sendo $\mu(X) < +\infty$ e $p \geq q \geq 1$, prove que $L^p(X, \mu) \subset L^q(X, \mu)$.

   Sugestão: Aplique a desigualdade de Hölder a $|f|^q$.

6. (a) Prove que as convoluções permutam com as translações, isto é, sendo o operador translação $T(a)$ definido por $(T(a)f)(x) := f(x + a)$, verifica-se $T(a)(f_1 * f_2) = T(a)f_1 * f_2 = f_1 * T(a)f_2$.

   (b) Sendo $f \in \mathcal{C}$ e ρ_n uma sucessão regularizante, diga, justificando convenientemente, para que função tende uniformemente a sucessão $T(a)(\rho_n * f)$, em cada compacto de $\mathbb{R}^n$.

7. Sejam E um espaço de Banach e K um seu subespaço convexo, fechado e limitado.

   Diga, justificando convenientemente, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

   - *Se K é compacto para $\sigma(E, E')$, então $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é compacto para $\sigma(E, E')$.*
   - *Se $E = \mathbb{R}^3$, então K é compacto para $\sigma(E, E')$.*
   - *Se $E' = L^3(\mathbb{R}^n)$, então K é compacto para $\sigma(E, E')$.*

8. Diga, justificando convenientemente, se, em $\mathbb{R}^2$, poderá existir alguma sucessão convergente fracamente mas não convergente fortemente.