Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Análise Real

Exame de época de recurso
Data: 29/01/2008
Duração: 2h30m

1. Seja μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}^n$. Seja f uma função real definida em $\mathbb{R}^n$.
   (a) Prove que se f é contínua, então f é μ-mensurável.
   (b) Prove que se f é mensurável e $a < b$, então $f^{-1}([a, b])$ é μ-mensurável.

2. Diga, justificando convenientemente, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:
   Qualquer conjunto Lebesgue-mensurável, em $\mathbb{R}$, é a reunião de um boreliano com um conjunto de medida nula.

3. Determine o integral de Lebesgue, sobre o intervalo $]0, +\infty[$, da função $f(x) = \dfrac{1}{[x+1][x+2]}$ ($[x]$ designa a parte inteira de x).

4. Seja f uma função μ-mensurável, definida em $\mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}^+$.
   Prove que existem conjuntos mensuráveis B_k, $k = 1, 2, \ldots$, tais que

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ \mu(B_k).$$

5. Se f e g são elementos de L^p, para $1 < p < +\infty$, prove que $\| f+g \|_{L^p} \leq \| f \|_{L^p} + \| g \|_{L^p}$.
   Sugestão: Aplique a desigualdade de Hölder.

6. Prove que o operador convolução é comutativo e associativo.

7. Seja E um espaço de Banach. Diga, justificando convenientemente, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:
   - *Se $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é compacto para $\sigma(E, E')$ e E é de dimensão finita, então $\dim E < \dim E''$.*
   - *Se E é uniformemente convexo e separável, então E' é separável.*
   - *Se E e E' são reflexivos, então E é de dimensão finita.*

8. Sejam E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão convergente, em E. Diga, justificando convenientemente, se, para a topologia fraca $\sigma(E, E')$, (x_n) é convergente e tem limite único.