Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Análise Real

Exame da época normal
Data: 11/01/2010
Duração: 2h30m

1. Sejam X um conjunto não vazio e μ uma medida, em X.

   Sejam ainda A e B subconjuntos de X, tais que $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$, B é μ-mensurável e $\mu(B) = \mu(A)$.

   Mostre que, para qualquer subconjunto μ-mensurável, C, de X, se verifica
$$\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C).$$

2. Seja μ uma medida, em $\mathbb{R}^n$, tal que, para quaisquer subconjuntos A e B de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $dist(A, B) > 0$, se verifica $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

   Seja ainda (T, τ) um espaço topológico.

   Prove que se $f : \mathbb{R}^n \to T$ é uma função contínua, então f é μ-mensurável.

3. Considere $(L^p(X), \mu)$ com $0 < p < 1$ e μ, σ-finita. No que se segue, p' designa o conjugado de p.

   Mostre que se $f \in L^p(X)$, $g \in L^{p'}(X)$, f e g são positivas, então, supondo $\int_X g^{p'} \mathrm{d}\mu \neq 0$, a desigualdade de Hölder pode escrever-se na forma
$$\int_X fg \,\mathrm{d}\mu \geq \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^{p'} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

   Sugestão: Sendo $\phi := g^{-p}$ e $\psi := g^p f^p$, repare que, se fg é integrável, então $\psi \in L^{\frac{1}{p}}(X)$.

4. Prove que o integral de Lebesgue, sobre o intervalo $[0, +\infty[$, da função f definida por $f(x) = e^{-[x]}$, se x não é racional e $f(x) = 10$, se x é racional, tem o valor $\frac{e}{e-1}$ ($[z]$ designa a parte inteira de z).

   Sugestão: Os subconjuntos numeráveis, de $\mathbb{R}$, têm medida, de Lebesgue, nula.

5. (a) As convoluções permutam com as translações, isto é, sendo o operador translação $T(a)$ definido por $(T(a)f)(x) := f(x + a)$, verifica-se $T(a)(f_1 * f_2) = T(a)f_1 * f_2 = f_1 * T(a)f_2$?

   (b) Sendo $f \in \mathcal{C}$ e ρ_n uma sucessão regularizante, diga, justificando convenientemente, para que função tende uniformemente a sucessão $T(a)(\rho_n * f)$, em cada compacto de $\mathbb{R}^n$.

6. Seja $(H, \|\cdot\|)$ um espaço de Hilbert e $(x_n)_n$ uma sucessão de vectores ortogonais, em H.

   (a) Prove que se $\sum_n x_n$ é fortemente convergente, então $\sum_n \|x_n\|^2$ é convergente.

   (b) Será $\sum_n x_n$ fracamente convergente e terá limite (fraco) único? Justifique a sua resposta.

7. Sejam μ uma medida de Radon, em $\mathbb{R}$ e A um conjunto μ-mensurável, com $\mu(A) < \infty$.

   Prove que $A = B \cup C$ com B um conjunto obtido, a partir de intervalos, por reuniões, intersecções e diferenças numeráveis e $\mu(C) = 0$.