Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Álgebra II
Licenciatura em Matemática

18 de Junho de 2001 Duração: 2h 30m

Justifique convenientemente as suas afirmações.

1. Seja C um corpo e seja A o anel das matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \text{ com } a, b \in C$$

munido das operações habituais de adição e multiplicação de matrizes.

Considere a aplicação $h : C[x] \to A$ definida por $h\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix}$.

(a) Prove que h é um homomorfismo de anéis.

(b) Descreva o núcleo de h e indique um elemento gerador.

2. Seja R um anel com identidade e. Suponhamos que o inteiro positivo n satisfaz $ne = 0$ e nenhum inteiro positivo menor que n satisfaz a mesma igualdade. Suponhamos ainda que n não é primo. Prove que R tem divisores de zero.

3. Determine a factorização em polinómios primos em cada um dos domínios $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$ dos polinómios

(a) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$;

(b) $x^4 + 1$.

4. Considere os inteiros de Gauss $z_1 = 4 + 9i$ e $z_2 = 3 - 2i$.

(a) Determine o máximo divisor comum d de z_1 e z_2.

(b) Determine inteiros de Gauss a e b tais que $d = az_1 + bz_2$.

5. Seja α um número complexo que satisfaz $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$.

(a) Prove que $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\alpha\sqrt{2})$.

(b) Determine um polinómio f de $\mathbb{Q}[x]$ de modo que para toda a raiz β de f se tenha $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = 21$.

6. Seja A um anel comutativo com identidade e I um seu ideal. Prove que I é primo se e só se A/I é domínio de integridade.

7. Seja C um corpo e E uma sua extensão.

(a) Quando é que se diz que E é uma extensão finita de C?

(b) Prove que se E é uma extensão finita de C, então todo o elemento de E é algébrico sobre C.