Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Exame de Álgebra II
Licenciatura em Matemática

12 de Julho de 2001 Duração: 2h 30m

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. Considere o conjunto H das matrizes de números complexos da forma

$$\begin{bmatrix} z & u \\ -\overline{u} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

munido das operações de adição e multiplicação habituais. Prove que:

(a) O conjunto H é um anel com identidade;

(b) O conjunto S das matrizes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

com a e b reais, é um subanel de H, mas não é um ideal;

(c) S é isomorfo ao corpo dos complexos.

2. Seja R um anel comutativo e I e J dois dos seus ideais. Considere o conjunto

$$K = \{a \in R : aI \subseteq J\}.$$

Prove que K é um ideal de R.

3. Seja R um anel em que as duas operações coincidem, isto é, $a + b = ab$ quaisquer que sejam a e b. Prove que $R = \{0\}$.

4. Considere os polinómios de $\mathbb{Z}_5[x]$

$$f = x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \text{e} \quad g = 3x^2 + x + 4.$$

Prove que são primos entre si.

5. Considere o polinómio $f = ix^2 + x - i \in \mathbb{Q}(i)[x]$.

(a) Mostre que f é irredutível sobre $\mathbb{Q}(i)$.

(b) Seja α uma raiz de f. Determine a dimensão e uma base de $\mathbb{Q}(i, \alpha)$ sobre $\mathbb{Q}$.

(c) Determine o polinómio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ e conclua que $i \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

6. Seja D um anel e I um seu ideal.

(a) Quando diz que I é primo? E maximal?

(b) Prove que, no caso de D ser um domínio de ideais principais, se I for primo não nulo então é maximal.

7. Seja F um corpo finito. Demonstre que o número de elementos de F é uma potência de um primo.