Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

Exame de Álgebra II
Licenciatura em Matemática

2/7/2003 Duração: 2h 30m

Importante: Responda apenas ao que se pede. Justifique as suas respostas. Seja conciso.

1. Considere o anel dos inteiros de Gauss $G = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ e seja $I = \{a + bi \in G : 5|a \text{ e } 5|b\}$.
   (a) Prove que I é um ideal de G.
   (b) Mostre que o ideal I não é maximal.
   (c) Mostre que o ideal gerado por $2 + 3i$ e $1 + i$ é trivial em G.

2. No anel $\mathbb{Z}_8$ determine:
   (a) os elementos invertíveis e os divisores de zero.
   (b) todos os ideais.
   (c) um homomorfismo não nulo de $\mathbb{Z}_8$ em $\mathbb{Z}_6$.

3. Construa um corpo com 8 elementos.

4. (a) Averigúe se os seguintes polinómios são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$:
$$f = x^3 + 15x^2 + 3x - 3, \qquad g = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$
   (b) Determine uma base da extensão de menor grau de $\mathbb{Q}$ onde o polinómio $h = fg$ tem uma raiz α.
   (c) Represente o elemento $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ na base indicada.

5. Averigúe se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições, justificando a sua resposta.
   (a) O elemento 3 é primo e irredutível em $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   (b) Todo o ideal de $\mathbb{R}[x]$ é principal.
   (c) Se f é um homomorfismo não nulo de um anel comutativo A num domínio de integridade D, então $Nuc(f)$ é um ideal primo de A.
   (d) No anel dos números inteiros existem dois ideais diferentes de $\{0\}$ cuja intersecção é igual a $\{0\}$.

6. Determine um elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que as extensões $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{7})$ e $\mathbb{Q}(\alpha)$ coincidam.

7. Seja A um domínio de integridade. Prove que se todo o ideal de A é um ideal primo, então A é um corpo.