Duração: 20m **Teste 1A** 26/09/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) A *lei do corte para o produto* é válida em qualquer anel comutativo com 1.

   (b) As unidades do *anel dos inteiros de Gauss* $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ são $\{1, -1, i, -i\}$.

   (c) Todo o domínio de integridade finito é um corpo.

   (d) $\mathbb{N}$ é um subanel de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

   (e) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(4) = 0\}$ é um ideal primo do anel $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ das funções reais de variável real.

   (f) $\mathbb{Z}/\langle 11 \rangle$ é um corpo.

2. Seja A um anel arbitrário.

   (a) Prove que em A, $0 = -0$.

   (b) A equação $a + x = b$ $(a, b \in A)$ tem exactamente uma solução em A. O que é que pode dizer sobre a equação $ax = b$? E sobre a equação $x = -x$?

Duração: 20m **Teste 1B** 26/09/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) As unidades do *anel dos inteiros de Gauss* $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ são $\{1, -1, i, -i\}$. ☐ ☐

   (b) A *lei do corte para o produto* é válida em qualquer domínio de integridade. ☐ ☐

   (c) Todo o anel finito é comutativo. ☐ ☐

   (d) $\mathbb{N}$ é um subanel de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. ☐ ☐

   (e) $\mathbb{Z}/\langle 12\rangle$ é um corpo. ☐ ☐

   (f) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(7) = 0\}$ é um ideal primo do anel $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ das funções reais de variável real. ☐ ☐

2. Seja A um anel arbitrário com identidade 1.

   (a) Prove que em A, $1 = 1^{-1}$.

   (b) A equação $a + x = b$ $(a, b \in A)$ tem exactamente uma solução em A. O que é que pode dizer sobre a equação $ax = b$? E sobre a equação $x = -x$?

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Duração: 20m **Teste 1C** 28/09/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Indique quais dos seguintes conjuntos são subanéis ou ideais dos anéis indicados colocando, em cada alínea, uma cruz na coluna correcta.

   (**N**: **não** é um subanel; **S**: **é** um subanel mas **não** é um ideal; **I**: **é** um ideal)

	N	S	I
(a) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros em $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.			
(b) O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais em $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.			
(c) O conjunto dos números da forma ai, com $a \in \mathbb{R}$, em $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.			
(d) O conjunto $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(4) = 1\}$ no anel $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ das funções reais de variável real.			

   Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

	V	F
(e) Num anel arbitrário A, $(ab)^n = a^n b^n$, $\forall a, b \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.		
(f) Para qualquer elemento $a \neq 0$ num anel arbitrário A, se $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então a é um divisor de zero.		

2. Seja D um domínio de integridade. Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, senão apresente um contra-exemplo:

   (a) $-1 \neq 1$.

   (b) $ab = 1$ se e só se $ba = 1$.

Duração: 20m **Teste 1D** 28/09/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Indique quais dos seguintes conjuntos são subanéis ou ideais dos anéis indicados colocando, em cada alínea, uma cruz na coluna correcta.

   (**N**: **não** é um subanel; **S**: **é** um subanel mas **não** é um ideal; **I**: **é** um ideal) **N S I**

   (a) O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais em $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

   (b) O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros em $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

   (c) O conjunto dos números da forma $2ai$, com $a \in \mathbb{R}$, em $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

   (d) O conjunto $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(4) = 0\}$ no anel $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ das funções reais de variável real.

   Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (e) Num anel arbitrário A, $a^2 = 1$ implica $a = 1$ ou $a = -1$.

   (f) Para qualquer elemento $a \neq 0$ num anel arbitrário A, se $a^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então a é um divisor de zero.

2. Seja A um anel sem divisores de zero. Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, senão apresente um contra-exemplo:

   (a) $-1 \neq 1$.

   (b) $ab = 1$ se e só se $ba = 1$.
