Duração: 20m **Teste 2A** 31/10/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Se C é um corpo, então $C[x]$ é um corpo.

   (b) $4x + 1$ não é uma unidade de $\mathbb{Z}_8[x]$.

   (c) Para qualquer anel A e quaisquer $p(x), q(x) \in A[x]$, tem-se $gr(p(x)q(x)) = gr(p(x)) + gr(q(x))$.

   (d) Os polinómios $2x$ e $x + 2$ de $\mathbb{F}_3[x]$ são primos entre si.

   (e) A função $h : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$ definida por $h\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i 5^n$ é um homomorfismo de anéis.

2. (a) Calcule o produto $(2x^2 + x + 1)(2x^2 + 3x + 2)$ em $\mathbb{Z}_m[x]$, para $m = 2, 3, 6$.

   (b) $x^4 + 2x^3 + 2x + 2$ é irredutível em $\mathbb{Z}_3[x]$?

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Se C é um corpo, então $C[x]$ é um corpo. | | $\times$ |

   `[Nenhum polinómio de grau` ≥ 1 `em` $C[x]$ `é invertível.]`

   (b) $4x+1$ não é uma unidade de $\mathbb{Z}_8[x]$. | | $\times$ |

   `[`$(4x+1)(4x+1) = 0x^2+4x+4x+1 = 1$`.]`

   (c) Para qualquer anel A e quaisquer $p(x), q(x) \in A[x]$, tem-se $gr(p(x)q(x)) = gr(p(x)) + gr(q(x))$. | | $\times$ |

   `[O exemplo na alínea anterior mostra que não.]`

   (d) Os polinómios $2x$ e $x+2$ de $\mathbb{Z}_3[x]$ são primos entre si. | $\times$ | |

   `[`$2x = 2(x+2)+2$ `pelo que o` mdc `de` $2x$ `e` $x+2$ `é o polinómio mónico de` $\mathbb{Z}_3[x]$ `associado de 2, ou seja, 1.]`

   (e) A função $h : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}$ definida por $h\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i 5^n$ é um homomorfismo de anéis. | | $\times$ |

   `[Por exemplo,` $h(1) = 1$ `e` $h(1+x) = 10$ `mas` $h(2+x) = 15 \neq 11$`.]`

2. (a) Calcule o produto $(2x^2+x+1)(2x^2+3x+2)$ em $\mathbb{Z}_m[x]$, para $m = 2, 3, 6$.

$$\begin{aligned}(2x^2+x+1)(2x^2+3x+2) &= 4x^4+6x^3+4x^2+2x^3+3x^2+2x+2x^2+3x+2\\ &= 4x^4+8x^3+9x^2+5x+2\\ &= \begin{cases} x^2+x & \text{se } m=2\\ x^4+2x^3+2x+2 & \text{se } m=3\\ 4x^4+2x^3+3x^2+5x+2 & \text{se } m=6.\end{cases}\end{aligned}$$

   (b) x^4+2x^3+2x+2 é irredutível em $\mathbb{Z}_3[x]$?

   Não: pela alínea anterior, $x^4+2x^3+2x+2 = (2x^2+x+1)(2x^2+3x+2)$, e nenhum destes factores, sendo de grau 2, é uma unidade de $\mathbb{Z}_3[x]$.

Duração: 20m **Teste 2B** 2/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Em $\mathbb{Z}_8[x]$, $4x^2 + 2x + 4$ é um divisor de zero. ☐ ☐

   (b) Se $A[x]$ tem divisores de zero, então A tem divisores de zero. ☐ ☐

   (c) O anel das matrizes quadradas de ordem 20 com elementos no corpo $\mathbb{Z}_5$ tem característica 20. ☐ ☐

   (d) Em $\mathbb{Z}_3[x]$, $mdc(x^7 + x^6 + 2x^5 + x^3 + 2x^2 + 2x, 2x^5 + x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2$. ☐ ☐

   (e) $\mathbb{R}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{Q}$. ☐ ☐

2. Seja D um domínio de integridade. Mostre que:

   (a) Um polinómio redutível em $D[x]$ não tem necessariamente raízes em D.

   (b) Se $gr(p(x)) \geq 2$ e $p(x)$ tem uma raiz em D, então é redutível em $D[x]$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Soluções **Teste 2B** 2/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

	V	F
(a) Em $\mathbb{Z}_8[x]$, $4x^2+2x+4$ é um divisor de zero.	×	
(b) Se $A[x]$ tem divisores de zero, então A tem divisores de zero.	×	
(c) O anel das matrizes quadradas de ordem 20 com elementos no corpo $\mathbb{Z}_5$ tem característica 20.		×
(d) Em $\mathbb{Z}_3[x]$, $mdc(x^7+x^6+2x^5+x^3+2x^2+2x, 2x^5+x^3+2x^2+1) = x^2+2$.		×
(e) $\mathbb{R}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{Q}$.		×

(a) `[`$4(4x^2+2x+4)=0$`.]`

(b) `[Sejam` $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ `e` $q(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$ `dois elementos de` $A[x]$`, com` $a_n\neq 0$ `e` $b_m \neq 0$`, tais que` $p(x)q(x)=0$`. Então` $a_nb_m=0$`.]`

(c) `[A característica é claramente 5 e não 20.]`

(d) `[`$x^7+x^6+2x^5+x^3+2x^2+2x = (2x^5+x^3+2x^2+1)(2x^2+2x)$ `donde` $mdc(x^7+x^6+2x^5+x^3+2x^2+2x, 2x^5+x^3+2x^2+1) = x^5+2x^3+x^2+2$`.]`

(e) `[Por exemplo, pelo Teorema de Lindemann,` $\pi\in\mathbb{R}$ `é transcendente sobre` $\mathbb{Q}$`.]`

2. Seja D um domínio de integridade. Mostre que:

   (a) Um polinómio redutível em $D[x]$ não tem necessariamente raízes em D.

   Por exemplo, x^4+2x+1 é redutível em $\mathbb{R}[x]$, pois $x^4+2x+1=(x^2+1)^2$, mas não tem raízes reais.

   (b) Se $gr(p(x))\geq 2$ e $p(x)$ tem uma raiz em D, então é redutível em $D[x]$.

   Se $p(x)$ tem uma raiz a em D então, pelo Teorema do Resto, $p(x)=(x-a)q(x)$ para algum polinómio $q(x)\in D[x]$. Pela regra dos graus, $q(x)$ tem necessariamente grau ≥ 1, pelo que não é uma unidade de $D[x]$. Portanto, $(x-a)q(x)$ é uma factorização não trivial de $p(x)$ em $D[x]$, o que mostra que este polinómio é redutível em $D[x]$.

Duração: 20m **Teste 2C** 2/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

	V	**F**
(a) Em $\mathbb{Z}_{16}[x]$, $4x^2 + 2x + 4$ é um divisor de zero.		
(b) Se $A[x]$ tem divisores de zero, então A tem divisores de zero.		
(c) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 1\rangle$ é um corpo.		
(d) Os polinómios $x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5$ e $2x^3 - 2$ de $\mathbb{Z}_7[x]$ são primos entre si.		
(e) $\mathbb{C}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{R}$.		

2. Seja D um domínio de integridade. Mostre que:

   (a) Se $gr(p(x)) \geq 2$ e $p(x)$ tem uma raiz em D, então é redutível em $D[x]$.

   (b) Um polinómio redutível em $D[x]$ não tem necessariamente raízes em D.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Soluções **Teste 2C** 2/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) Em $\mathbb{Z}_{16}[x]$, $4x^2 + 2x + 4$ é um divisor de zero.

V	F
×	

   [$8(4x^2 + 2x + 4) = 0$.]

   (b) Se $A[x]$ tem divisores de zero, então A tem divisores de zero.

V	F
×	

   [Sejam $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ dois elementos de $A[x]$, com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, tais que $p(x)q(x) = 0$. Então $a_n b_m = 0$.]

   (c) $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 1\rangle$ é um corpo.

V	F
	×

   [Basta observar que o ideal $\langle x^2 + 2x + 1\rangle$ não é maximal pois o polinómio $x^2 + 2x + 1$ não é irredutível sobre $\mathbb{Z}_3$: é de grau 2 e tem uma raiz em $\mathbb{Z}_3$, nomeadamente o número 2.]

   (d) Os polinómios $x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5$ e $2x^3 - 2$ de $\mathbb{Z}_7[x]$ são primos entre si.

V	F
	×

   [$x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5 = (2x^3 - 2)(4x^4 + 5x^3 + 4x + 2) + 5x + 2$ e $2x^3 - 2 = (5x + 2)(6x^2 - x + 6)$ pelo que o $mdc(x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5, 2x^3 - 2)$ é o polinómio mónico associado de $5x + 2$, ou seja, $3(5x + 2) = x + 6$.]

   (e) $\mathbb{C}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{R}$.

V	F
×	

   [Todo o elemento de $\mathbb{C}$ é algébrico sobre $\mathbb{R}$, pois $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.]

2. Seja D um domínio de integridade. Mostre que:

   (a) Se $gr(p(x)) \geq 2$ e $p(x)$ tem uma raiz em D, então é redutível em $D[x]$.

   Se $p(x)$ tem uma raiz a em D então, pelo Teorema do Resto, $p(x) = (x - a)q(x)$ para algum polinómio $q(x) \in D[x]$. Pela regra dos graus, $q(x)$ tem necessariamente grau ≥ 1, pelo que não é uma unidade de $D[x]$. Portanto, $(x - a)q(x)$ é uma factorização não trivial de $p(x)$ em $D[x]$, o que mostra que este polinómio é redutível em $D[x]$.

   (b) Um polinómio redutível em $D[x]$ não tem necessariamente raízes em D.

   Por exemplo, $x^4 + 2x + 1$ é redutível em $\mathbb{R}[x]$, pois $x^4 + 2x + 1 = (x^2 + 1)^2$, mas não tem raízes reais.
