Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Duração: 20m **Teste 3A** 28/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

	V	**F**
(a) $\mathbb{C}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{R}$.		
(b) O polinómio $x^3 + 2x^2 + 10$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ mas é redutível sobre $\mathbb{Z}_{13}$.		
(c) O polinómio $x^2 - 2x + 2$ é redutível sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.		
(d) $\mathbb{R}$ é um corpo algebricamente fechado.		
(e) O número $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ é construtível a partir de $\mathbb{Q}$.		

2. (a) Determine a extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta)$ de $\mathbb{Q}$, onde $\theta^2 - 2\theta + 2 = 0$.

   (b) Qual é o inverso de θ nesta extensão?

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) $\mathbb{C}$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{R}$. [× |]

   `[`$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ `e` i `é algébrico sobre` $\mathbb{R}$`. Alternativa: todo o número complexo` $a + ib$ `é algébrico sobre` $\mathbb{R}$ `pois é raiz do polinómio` $x^4 - 2(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 + b^2)^2$`.]`

   (b) O polinómio $x^3 + 2x^2 + 10$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ mas é redutível sobre $\mathbb{Z}_{13}$. [× |]

   `[Sobre` $\mathbb{Q}$`: pelo Critério de Eiseinstein (`$p = 2$`).`
   `Sobre` $\mathbb{Z}_{13}$`: pelo critério das raízes (1 é raiz).]`

   (c) O polinómio $x^2 - 2x + 2$ é redutível sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. [| ×]

   `[As duas raízes de` $x^2 - 2x + 2$ `são` $1 \pm i$ `e não pertencem a` $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$`, pois` $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \{a + b\sqrt{3}i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$`.]`

   (d) $\mathbb{R}$ é um corpo algebricamente fechado. [| ×]

   `[`$x^2 + 1$ `não tem raízes reais.]`

   (e) O número $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ é construtível a partir de $\mathbb{Q}$. [× |]

   `[O número` $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ `corresponde ao ponto` $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ `do plano. Este ponto é claramente construtível a partir de` $\mathbb{Q}$ `pois, como vimos, qualquer raiz quadrada é construtível a partir de` $\mathbb{Q}$`.]`

2. (a) Determine a extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta)$ de $\mathbb{Q}$, onde $\theta^2 - 2\theta + 2 = 0$.

   $x^2 + 3$ é o polinómio mínimo de $\sqrt{-3}$ sobre $\mathbb{Q}$ e, por 1(c), $x^2 - 2x + 2$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Então

   $$[\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta) : \mathbb{Q}(\sqrt{-3})][\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) : \mathbb{Q}] = 2 \times 2 = 4,$$

   pelo que $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \theta) = \{a + b\sqrt{3}i + c\theta + d\theta\sqrt{3}i \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

   (b) Qual é o inverso de θ nesta extensão?

   $\theta^2 - 2\theta + 2 = 0$ implica $\theta(\theta - 2) = -2$, pelo que $\theta\frac{\theta-2}{-2} = 1$. Portanto $\theta^{-1} = \frac{\theta-2}{-2} = 1 - \frac{1}{2}\theta$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Duração: 20m **Teste 3B** 30/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) O polinómio $x^4 + 2x^2 + 2x + 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_7$.

   (b) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{4}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$.

   (c) A extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ de $\mathbb{Q}$ tem dimensão 6.

   (d) $-2\theta^2 + 2\theta$ é o inverso de $\frac{\theta+1}{2}$ na extensão $\mathbb{Q}(\theta)$, onde $\theta^3 - \theta + 1 = 0$.

   (e) Um polígono regular de 9 lados pode ser construído com régua e compasso.

2. Considere o polinómio $p(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (a) Mostre que $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) Construa uma extensão de decomposição de $p(x)$ e determine a sua dimensão.

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) O polinómio x^4+2x^2+2x+2 é irredutível sobre $\mathbb{Z}_7$. [ ] [×]

   `[É redutível pois tem uma raiz em` $\mathbb{Z}_7$`: 1.]`

   (b) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. [×] [ ]

   `[Porque` $\sqrt{2}$ `e` $\sqrt[3]{4}$ `são ambos algébricos sobre` $\mathbb{Q}$ `e a soma de quaisquer dois números algébricos ainda é um número algébrico:` $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4})$ `e, como` $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4}):\mathbb{Q}]=6$`, os 7 vectores 1,` $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2,\ldots,(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^6$ `de` $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4})$ `são linearmente dependentes; isto significa que existem racionais` $a_0,a_1,\ldots,a_6$ `não todos nulos tais que` $a_0+a_1(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})+a_2(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2+\cdots+a_6(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^6=0$`, ou seja,` $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ `é raiz do polinómio não nulo` $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6\in\mathbb{Q}[x]$`.]`

   (c) A extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2})$ de $\mathbb{Q}$ tem dimensão 6. [ ] [×]

   `[`$[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{2}):\mathbb{Q}(\sqrt{3})][\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=2\times 2=4$ `pois` x^2-2 `é o polinómio mínimo de` $\sqrt{2}$ `sobre` $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ `e` x^2-3 `é o polinómio mínimo de` $\sqrt{3}$ `sobre` $\mathbb{Q}$`.]`

   (d) $-2\theta^2+2\theta$ é o inverso de $\frac{\theta+1}{2}$ na extensão $\mathbb{Q}(\theta)$, onde $\theta^3-\theta+1=0$. [×] [ ]

   `[`$\frac{\theta+1}{2}(-2\theta^2+2\theta)=(\theta+1)(-\theta^2+\theta)=-\theta^3+\theta^2-\theta^2+\theta=-\theta^3+\theta=1$`.]`

   (e) Um polígono regular de 9 lados pode ser construído com régua e compasso. [×] [ ]

   `[`$9=3\times 3$ `e 3 é um primo de Fermat.]`

2. Considere o polinómio $p(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (a) Mostre que $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se e só se $8x^3-6x-1$ o é. As possíveis raízes racionais deste último polinómio são: $\pm 1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}$. Nenhuma delas é de facto uma raiz pelo que o polinómio, não tendo raízes em $\mathbb{Q}$ e sendo de grau 3, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) Construa uma extensão de decomposição de $p(x)$ e determine a sua dimensão.

   $$\begin{aligned}\mathbb{Q}[x]/\langle p(x)\rangle &= \{a(x)+\langle p(x)\rangle \mid a(x)\in\mathbb{Q}[x]\}=\{a(x)+\langle p(x)\rangle \mid a(x)\in\mathbb{Q}[x], gr(a(x))\leq 2\}\\ &\cong \mathbb{Q}(\theta),\end{aligned}$$

   onde $4\theta^3-3\theta-\frac{1}{2}=0$. Como $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$, então $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]=3$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Duração: 20m **Teste 3C** 30/11/05

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V** **F**

   (a) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) O polinómio x^3+2x^2+2x+2 é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$.

   (c) $\mathbb{Q}(2+\sqrt[3]{4})=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

   (d) $-\theta^2+\theta$ é o inverso de $\frac{\theta+1}{2}$ na extensão $\mathbb{Q}(\theta)$, onde $\theta^3-\theta+1=0$.

   (e) Um polígono regular de 7 lados pode ser construído com régua e compasso.

2. Considere o polinómio $p(x)=8x^3-6x-1$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (a) Mostre que $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) Construa uma extensão de decomposição de $p(x)$ e determine a sua dimensão.

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:
   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

	V	F
(a) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$.	×	
(b) O polinómio x^3+2x^2+2x+2 é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$.	×	
(c) $\mathbb{Q}(2+\sqrt[3]{4})=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.	×	
(d) $-\theta^2+\theta$ é o inverso de $\frac{\theta+1}{2}$ na extensão $\mathbb{Q}(\theta)$, onde $\theta^3-\theta+1=0$.		×
(e) Um polígono regular de 7 lados pode ser construído com régua e compasso.		×

(a) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$.

[Porque $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{4}$ são ambos algébricos sobre $\mathbb{Q}$ e a soma de quaisquer dois números algébricos ainda é um número algébrico: $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4})$ e, como $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4}):\mathbb{Q}]=6$, os 7 vectores 1, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2,\ldots,(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^6$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{4})$ são linearmente dependentes; isto significa que existem racionais $a_0,a_1,\ldots,a_6$ não todos nulos tais que $a_0+a_1(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})+a_2(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2+\cdots+a_6(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^6=0$, ou seja, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ é raiz do polinómio não nulo $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_6x^6\in\mathbb{Q}[x]$.]

(b) O polinómio x^3+2x^2+2x+2 é irredutível sobre $\mathbb{Z}_5$.

[É irredutível pois não tem raízes em $\mathbb{Z}_5$.]

(c) $\mathbb{Q}(2+\sqrt[3]{4})=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

[$\mathbb{Q}(2+\sqrt[3]{4})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ pois $2\in\mathbb{Q}$ e $\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2})^2\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. A inclusão recíproca também é verdadeira pois $\sqrt[3]{2}=\frac{(2+\sqrt[3]{4})^2}{2}-2-2\sqrt[3]{4}\in\mathbb{Q}(2+\sqrt[3]{4})$.]

(d) $-\theta^2+\theta$ é o inverso de $\frac{\theta+1}{2}$ na extensão $\mathbb{Q}(\theta)$, onde $\theta^3-\theta+1=0$.

[$\frac{\theta+1}{2}(-\theta^2+\theta)=\frac{1}{2}(-\theta^3+\theta^2-\theta^2+\theta)=\frac{1}{2}(-\theta^3+\theta)=\frac{1}{2}$.]

(e) Um polígono regular de 7 lados pode ser construído com régua e compasso.

[7 não é um primo de Fermat.]

2. Considere o polinómio $p(x)=8x^3-6x-1$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (a) Mostre que $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   As possíveis raízes racionais de $p(x)$ são: $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}$. Nenhuma delas é de facto uma raiz pelo que o polinómio, não tendo raízes em $\mathbb{Q}$ e sendo de grau 3, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

   (b) Construa uma extensão de decomposição de $p(x)$ e determine a sua dimensão.

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[x]/\langle p(x)\rangle &= \{a(x)+\langle p(x)\rangle \mid a(x)\in\mathbb{Q}[x]\}=\{a(x)+\langle p(x)\rangle \mid a(x)\in\mathbb{Q}[x], gr(a(x))\le 2\}\\ &\cong \mathbb{Q}(\theta),\end{aligned}$$

   onde $8\theta^3-6\theta-1=0$. Como $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$ é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$, então $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}]=3$.
