Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

1. Considere o conjunto $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$.
   (a) Prove que $(G, \cdot)$, onde $\cdot$ denota a multiplicação usual de matrizes, é um grupo abeliano.
   (b) Mostre que $(G, \cdot, \odot)$, onde $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & aa' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, é um anel comutativo com identidade.
   (c) Para que valores de $n \in \mathbb{N}$ é que o ideal $I_n = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$ é um ideal primo?

2. Determine:
   (a) A factorização de $x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 20x + 5$ em elementos irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$ e em $\mathbb{Z}_2[x]$.
   (b) Os polinómios mínimos de θ e de θ^2 sobre $\mathbb{Q}$, onde θ é uma raiz não nula do polinómio $x^4 - 4x^2 + 2x$.
   (c) O inverso de $2 + \sqrt[3]{4}$ em $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$;
   (d) A dimensão e uma base da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \alpha)$ de $\mathbb{Q}$, onde $3\alpha^4 + 7\alpha^3 - 14\alpha^2 + 56 = 0$.
   (e) A característica de um corpo finito com 343 elementos.

3. Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, caso contrário apresente uma justificação sucinta da sua falsidade:
   (a) Todo o domínio de integridade finito é um corpo.
   (b) Existe $n \geq 2$ tal que $\sqrt[n]{2}$ é racional.
   (c) Num anel comutativo com identidade $1 \neq 0$ todo o ideal maximal é primo.

4. Considere os anéis quociente $\mathbb{Z}_2[x]/I$ sendo I o ideal gerado por
   (a) $1 + x + x^3$,
   (b) x^2.

   Diga se são corpos e construa as tabelas de $\mathbb{Z}_2[x]/ < x^2 >$.

5. Sejam R um domínio de ideais principais, S um domínio de integridade e $\phi : R \to S$ um homomorfismo sobrejectivo. Prove que ϕ é um isomorfismo ou S é um corpo.