Duração: 40m **Teste 1** 04/10/06

Os dois primeiros grupos de questões são de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa) **V F**

   (a) Seja A um anel. Então $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ para quaisquer $a,b\in A$.

   (b) Num anel com identidade, todo o elemento que não é um divisor de zero é invertível.

   (c) A função $h:\mathbb{Z}_3\to\mathbb{Z}_3$ definida por $h(a)=a^3$ é um homomorfismo de anéis.

   (d) Todo o corpo finito tem característica positiva prima.

   (e) As unidades do *anel dos inteiros de Gauss*, $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, são precisamente os elementos $1,-1,i,-i$.

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são subanéis ou ideais primos dos anéis indicados colocando, em cada alínea, uma cruz na coluna correcta:

   (**N**: **não** é um subanel; **S**: **é** um subanel mas **não** é um ideal;
   I: **é** um ideal mas **não** é primo; **P**: **é** um ideal primo) **N S I P**

   (a) O conjunto $\{x+yi\sqrt{2}\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ no anel $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

   (b) O conjunto $\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\mid f(4)=0\}$ no anel das funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

   (c) O conjunto $\{f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6\mid f(2)=0\}$ no anel das funções de $\mathbb{Z}_6$ em $\mathbb{Z}_6$.

3. Seja $A=(\mathbb{Q},+,*)$, onde $+$ denota a adição usual de racionais e $*$ é definida por $a*b=2ab$.

   (a) Mostre que A é um anel comutativo com identidade.

   (b) Determine um subanel de A que seja isomorfo ao anel usual $(\mathbb{Z},+,\times)$ dos inteiros, descrevendo o isomorfismo (e justificando que se trata de facto de um isomorfismo).

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Álgebra II**

Soluções **Teste 1** 04/10/06

---

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

   (**V**: verdadeira; **F**: falsa)

   (a) Seja A um anel. Então $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ para quaisquer $a, b \in A$.

   (b) Num anel com identidade, todo o elemento que não é um divisor de zero é invertível.

   (c) A função $h : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ definida por $h(a) = a^3$ é um homomorfismo de anéis.

   (d) Todo o corpo finito tem característica positiva prima.

   (e) As unidades do *anel dos inteiros de Gauss*, $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, são precisamente os elementos $1, -1, i, -i$.

	V	**F**
(a)		$\times$
(b)		$\times$
(c)	$\times$	
(d)	$\times$	
(e)	$\times$	

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são subanéis ou ideais primos dos anéis indicados colocando, em cada alínea, uma cruz na coluna correcta:

   (**N**: **não** é um subanel; **S**: **é** um subanel mas **não** é um ideal;
   I: **é** um ideal mas **não** é primo; **P**: **é** um ideal primo)

   (a) O conjunto $\{x + yi\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ no anel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

   (b) O conjunto $\{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f(4) = 0\}$ no anel das funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

   (c) O conjunto $\{f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6 \mid f(2) = 0\}$ no anel das funções de $\mathbb{Z}_6$ em $\mathbb{Z}_6$.

	N	**S**	**I**	**P**
(a)		$\times$		
(b)				$\times$
(c)			$\times$	

3. (a) Uma vez que $+$ é a adição usual, o par $(\mathbb{Q}, +)$ é um grupo comutativo. Bastará então verificar que a operação $*$ é associativa, distributiva relativamente à adição e tem elemento neutro:

   Associatividade: Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$ temos $a * (b * c) = a * (2bc) = 2a2bc = 4abc$ enquanto $(a * b) * c = (2ab) * c = 4abc$, pelo que se confirma a propriedade.

   Distributividade: Como $*$ é comutativa basta verificar uma das condições de distributividade: para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a * (b + c) = 2a(b + c) = 2ab + 2ac = (a * b) + (a * c)$.

   Elemento neutro: $1/2$ é elemento neutro de $*$ pois, para qualquer $a \in \mathbb{Q}$, $a * (1/2) = a$.

   (b) Consideremos $S = \{a/2 : a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$, que é claramente um subanel de A: é não vazio e, para quaisquer $x = a/2, y = b/2 \in S$, tem-se $x - y = (a/2) - (b/2) = (a - b)/2 \in S$ e $x * y = 2xy = 2(a/2)(b/2) = ab/2 \in S$.

   Também não é difícil ver que $(S, +, *) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

   Como, para cada $x \in S$, $2x \in \mathbb{Z}$, podemos definir a função

$$\begin{array}{rccc} f: & (S, +, *) & \to & (\mathbb{Z}, +, \cdot) \\ & x & \mapsto & 2x. \end{array}$$

   É um homomorfismo de anéis: para quaisquer $x, y \in S$ tem-se $f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$ e $f(x * y) = f(2xy) = 4xy = 2x2y = f(x)f(y)$.

   É injectiva: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$.

   É sobrejectiva: para cada $a \in \mathbb{Z}$ seja $x = a/2 \in S$; evidentemente $f(x) = 2(a/2) = a$.
