
O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

(**V**: verdadeira; **F**: falsa)

V **F**

(a) O polinómio $x^4 + 4x^2 + 6$ é irreduzível sobre \mathbb{Q} mas é reduzível sobre \mathbb{Z}_{11} .

--	--

(b) \mathbb{R} é uma extensão algébrica de \mathbb{Q} .

--	--

(c) O número real $\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$ é algébrico sobre \mathbb{Q} .

--	--

(d) O número real $\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$ é construtível, por régua e compasso, a partir de \mathbb{Q} .

--	--

(e) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}] = 6$.

--	--

2. Determine o inverso do elemento $\theta^2 - 6\theta + 8$ de $\mathbb{Q}(\theta)$, onde θ é raiz do polinómio $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.
3. Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ de \mathbb{Q} .
-

O primeiro grupo de questões é de escolha múltipla; uma resposta certa terá a cotação máxima que lhe for atribuída e uma resposta errada perderá metade dessa cotação (desde que a nota do teste permaneça não negativa).

1. Em cada uma das alíneas seguintes indique o valor lógico das afirmações:

(**V**: verdadeira; **F**: falsa)

V **F**

- (a) O polinómio $x^4 + 4x^2 + 6$ é irreduzível sobre \mathbb{Q} mas é reduzível sobre \mathbb{Z}_{11} .

×	
---	--

 [Sobre \mathbb{Q} : pelo Critério de Eiseinstein ($p = 2$).
 Sobre \mathbb{Z}_{11} : pelo critério das raízes (1 é raiz).]
- (b) \mathbb{R} é uma extensão algébrica de \mathbb{Q} .

	×
--	---

 [\mathbb{R} contém números, como π ou e , que são transcendentos sobre \mathbb{Q} , pelo que se trata de uma extensão transcendente de \mathbb{Q} .]
- (c) O número real $\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$ é algébrico sobre \mathbb{Q} .

×	
---	--

 [Basta observar que $\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$ é raiz do polinómio $(x^2 - 2)^3 = -2$, que tem coeficientes racionais.]
- (d) O número real $\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}$ é construtível, por régua e compasso, a partir de \mathbb{Q} .

	×
--	---

 [A dimensão $[\mathbb{Q}(\sqrt{2 - \sqrt[3]{2}}) : \mathbb{Q}]$, sendo igual a 6, não é uma potência de 2, pelo que o número não poderá ser construtível.]
- (e) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}] = 6$.

×	
---	--

 [Pelo Teorema da Torre, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}]$. O polinómio mínimo de $\sqrt[3]{3}$ sobre \mathbb{Q} é o polinómio $x^3 - 3$, pelo que $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3$. Por outro lado, $x^2 + 1$ é o polinómio mínimo de i sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ (a irreduzibilidade segue do facto das suas duas raízes não serem reais e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \subset \mathbb{R}$). Portanto, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})] = 2$, donde $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i) : \mathbb{Q}] = 6$.]

2. Determine o inverso do elemento $\theta^2 - 6\theta + 8$ de $\mathbb{Q}(\theta)$, onde θ é raiz do polinómio $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.

O polinómio $x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ é irreduzível sobre \mathbb{Q} (pelo critério de Eisenstein, $p = 3$), logo é o polinómio mínimo $m(x)$ de θ sobre \mathbb{Q} . Seja $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Uma vez que $m(x) = xf(x) + x + 3$ e $f(x) = (x - 9)(x + 3) + 35$ (o que confirma que $\text{mdc}(m(x), f(x)) = 1$), então

$$35 = f(x) - (x - 9)(m(x) - xf(x)) = (x^2 - 9x + 1)f(x) - (x - 9)m(x),$$

ou seja,

$$1 = \frac{1}{35}[(x^2 - 9x + 1)f(x) - (x - 9)m(x)].$$

Substituindo x por θ obtemos $1 = \frac{1}{35}(\theta^2 - 9\theta + 1)f(\theta)$, o que mostra que

$$(\theta^2 - 6\theta + 8)^{-1} = f(\theta)^{-1} = \frac{1}{35}(\theta^2 - 9\theta + 1).$$

3. Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ de \mathbb{Q} .

O elemento $\sqrt[4]{3}$ tem polinómio mínimo $x^4 - 3$ sobre \mathbb{Q} . Portanto,

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) = \{a_0 + a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{9} + a_3\sqrt[4]{27} \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Para definir um \mathbb{Q} -automorfismo Φ de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ basta definir a imagem de $\sqrt[4]{3}$ por Φ . Pelos resultados das aulas teóricas, qualquer \mathbb{Q} -automorfismo $\Phi : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ transforma $\sqrt[4]{3}$ numa raiz em $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ do mesmo polinómio. Como $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \subseteq \mathbb{R}$, além de $\sqrt[4]{3}$, só mais uma das quatro raízes complexas de $x^4 - 3$ pertence a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$: o número $-\sqrt[4]{3}$. Existem, pois, precisamente dois \mathbb{Q} -automorfismos:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_0 : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) & \rightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \\ a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ \sqrt[4]{3} & \mapsto & \sqrt[4]{3} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \Phi_1 : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) & \rightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}) \\ a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ \sqrt[4]{3} & \mapsto & -\sqrt[4]{3}. \end{array}$$

O primeiro é a identidade e o segundo aplica cada elemento $a_0 + a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{9} + a_3\sqrt[4]{27}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ em $a_0 - a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{9} - a_3\sqrt[4]{27}$. Portanto, $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}), \mathbb{Q}) = \{id, \Phi_1\}$, que é um grupo isomorfo a \mathbb{Z}_2 .
