Duração: 2h30m **Frequência** 27/05/09

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos.

---

1. Indique:

   (a) os elementos invertíveis e os divisores de zero de $\mathbb{Z}_8$.

   (b) os divisores (a menos de associados) de $x^4 - 1$ em $\mathbb{R}[x]$.

   (c) todos os naturais $n > 2$ para os quais $x - 2$ divide $x^4 + x^3 + x^2 + x$ em $\mathbb{Z}_n[x]$.

2. Para cada um dos seguintes ideais I de $\mathbb{Z}_2[x]$

   (a) $\langle x^3 + x + 1\rangle$

   (b) $\langle x^2\rangle$

   justifique se $\mathbb{Z}_2[x]/I$ é um corpo. Construa as tabelas de $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$.

   [Use a notação $\overline{p(x)}$ para denotar o elemento $p(x) + \langle x^2\rangle$ de $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$.]

3. (a) Seja L uma extensão de um corpo K. Dado $\theta \in L$, algébrico sobre K, defina *polinómio mínimo* de θ sobre K. Justifique porque existe sempre, e é único.

   [Não precisa de demonstrar os resultados teóricos que usar na sua justificação].

   (b) Determine o polinómio mínimo de $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ sobre $\mathbb{Q}$.

   (c) Prove que $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

   (d) Determine o inverso de $5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ em $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

4. Considere o polinómio $p(x) = 2x^7 + 12x^5 + 3x^3 + 6x + 6$ em $\mathbb{Q}[x]$.

   (a) Prove que $p(x)$ tem uma raiz real α.

   (b) Justifique se α é ou não um real construtível a partir dos racionais.

5. Seja θ a raiz real do polinómio $x^5 - 7$. Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\theta)$ de $\mathbb{Q}$.

   [Note que $\mathbb{Q}(\theta) \subseteq \mathbb{R}$.]

6. Sejam K, L, M corpos tais que L é uma extensão finita de K e M é uma extensão finita de L. Prove que $[M : K] = [M : L][L : K]$.
