Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Corpos e Equações Algébricas

SOLUÇÕES **Frequência** 27/05/09

---

1. (a) $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.
   Elementos invertíveis: 1, 3, 5 e 7 ($a^{-1} = a$ para $a = 1,3,5,7$).
   Divisores de zero: 2, 4, 6 ($2 \times_8 4 = 6 \times_8 4 = 0$).

   (b) $x^4-1 = (x^2)^2-1^2 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ dá-nos a factorização de x^4-1 em polinómios irredutíveis de $\mathbb{R}[x]$. Portanto, os divisores de x^4-1 são os polinómios

   $$1,\ (x-1),\ (x+1),\ (x^2+1),\ (x-1)(x+1) = x^2-1,\ (x-1)(x^2+1) = x^3-x^2+x-1,$$
   $$(x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1,\ x^4-1$$

   e os respectivos polinómios associados.

   (c) Pelo Teorema do Resto (válido em qualquer anel comutativo com identidade), $x-2$ divide $x^4+x^3+x^2+x$ em $\mathbb{Z}_n[x]$ precisamente quando 2 é raiz de $x^4+x^3+x^2+x$ em $\mathbb{Z}_n[x]$, ou seja, quando $2^4+2^3+2^2+2 = 30 \equiv_n 0$, isto é, $n \mid 30 = 2 \times 3 \times 5$. Portanto, como $n > 2$, $x-2$ divide $x^4+x^3+x^2+x$ em $\mathbb{Z}_n[x]$ se e só se $n = 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,$ ou 30.

2. $\mathbb{Z}_2[x]/I$ é um corpo se e só se o ideal $I = \langle p(x)\rangle$ é maximal, isto é, se e só se $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}_2$.

   (a) O polinómio $p(x) = x^3+x+1$ tem grau 3 e não tem raízes em $\mathbb{Z}_2$ logo é irredutível em $\mathbb{Z}_2[x]$ (de facto, $p(0) = p(1) = 1$). Portanto, o ideal $\langle x^3+x+1\rangle$ é maximal em $\mathbb{Z}_2[x]$ e $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x+1\rangle$ é um corpo.

   (b) O polinómio $p(x) = x^2$ tem uma raiz em $\mathbb{Z}_2$ ($p(0) = 0$) logo é redutível em $\mathbb{Z}_2[x]$. Portanto, o ideal $\langle x^2\rangle$ não é maximal em $\mathbb{Z}_2[x]$ pelo que $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$ não é um corpo.

   Tem-se

   $$\begin{aligned}\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle &= \{\overline{p(x)} : p(x) \in \mathbb{Z}_2[x]\}\\ &= \{\overline{a_0+a_1x} : a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_2\}\end{aligned}$$

   pois para cada $p(x) = x^2q(x)+r(x)$, $\overline{p(x)} = \overline{r(x)}$ (onde $gr(r(x)) \leq 2$). Portanto $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x+1}\}$, com tabelas

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{x+1}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{x+1}$
$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$
$\overline{x+1}$	$\overline{0}$	$\overline{x+1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$

3. (a) Um polinómio $m(x) \in K[x]$ diz-se *polinómio mínimo* de $\theta \in L$ sobre K se é mónico, irredutível sobre K e admite θ como raiz.

   O conjunto $I = \{p(x) \in K[x] : p(\theta) = 0\}$. é um ideal de $K[x]$. Portanto, como $K[x]$ é um domínio de ideais principais, podemos concluir que existe um polinómio mónico $m_\theta(x) \in K[x]$, único, tal que $I = \langle m_\theta(x) \rangle$. Só resta justificar que $m_\theta(x)$ é irredutível sobre K:

   Como $m_\theta(x)$ tem uma raiz, tem de ser de grau ≥ 1 necessariamente. Suponhamos que $m_\theta(x)$ era redutível, isto é, que $m_\theta(x) = p_1(x)p_2(x)$, com

   $$1 \leq gr(p_1(x)), gr(p_2(x)) < gr(m_\theta(x)). \tag{1}$$

   Então $0 = m_\theta(\theta) = p_1(\theta)p_2(\theta)$, donde $p_1(\theta) = 0$ ou $p_2(\theta) = 0$. Qualquer uma destas possibilidades contradiz (1): se $p_i(\theta) = 0$ ($i = 1$ ou $i = 2$), então $p_i(x) \in I$, ou seja, $m_\theta(x) \mid p_i(x)$, donde $gr(p_i(x)) \geq gr(m_\theta(x))$.

   (b) Seja $\theta = \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$. Como $\theta^2 = 8 + 2\sqrt{15}$ então $(\theta^2 - 8)^2 = 60$. Assim $\theta^4 - 16\theta^2 + 4 = 0$ pelo que θ é raiz de $x^4 - 16x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Este polinómio é irredutivel em $\mathbb{Q}[x]$ e é assim o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}$. De facto:

   - Não tem raízes racionais: as únicas possibilidades são ± 1, ± 2, ± 4, nenhuma o é.
   - Portanto, a única possibilidade de ser redutível é factorizar-se na forma

     $$x^4 - 16x^2 + 4 = (x^2 + ax + b)(x^2 + a'x + b').$$

     Isto será possível precisamente se o sistema

     $$\begin{cases} a + a' = 0 \\ b + aa' + b' = -16 \\ ab' + a'b = 0 \\ bb' = 4 \end{cases}$$

     tiver solução em $\mathbb{Q}$. Resolvendo vem

     $$\begin{cases} a' = -a \\ \hline a(b' - b) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b' = b \\ \hline \end{cases}$$

O caso $a = 0$ implica $b + b' = -16$ e $bb' = 4$, ou seja, $b^2 + 16b + 4 = 0$, que não tem raízes racionais. Por outro lado, o caso $b' = b$ implica $b^2 = 4$, ou seja, $b = 2$

ou $b=-2$. Substituindo na segunda equação obtemos $-a^2+4=-16 \Leftrightarrow a^2=20$ ou $-a^2-4=-16 \Leftrightarrow a^2=12$, ambas impossíveis em $\mathbb{Q}$.

Em conclusão, o sistema é impossível.

(c) A inclusão $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$ é óbvia pois $\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$. Por outro lado, da alínea anterior, $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5}):\mathbb{Q}]=4$. Bastará assim mostrar que também $[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}]$ é igual a 4. Pelo Teorema da Torre, $[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}(\sqrt{3})][\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}] = 2\times 2 = 4$ pois x^2-3 é o polinómio mínimo de $\sqrt{3}$ sobre $\mathbb{Q}$ e x^2-5 é o polinómio mínimo de $\sqrt{5}$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ (pois é um polinómio de grau 2 que não tem raízes em $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$).

(d) Da alínea anterior sabemos que

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}) = \{a+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}+d\sqrt{15} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}.$$

Portanto, queremos determinar $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ tais que

$$(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(a+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}+d\sqrt{15}) = 1.$$

Fazendo os cálculos, isto é equivalente a

$$(15b-15c-1)+(5a-15d)\sqrt{3}+(15d-3a)\sqrt{5}+(5c-3b)\sqrt{15}=0,$$

ou seja (uma vez que 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{15}$ são linearmente independentes):

$$\begin{cases} 15b-15c-1=0 \\ 5a-15d=0 \\ 15d-3a=0 \\ 5c-3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c=\frac{1}{15} \\ a=3d \\ a=5d \\ 5c=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=0 \\ c=\frac{1}{10} \\ b=\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Solução alternativa:

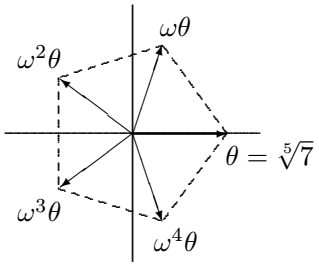
$$\begin{aligned} (5\sqrt{3}-3\sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}} &= \frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})} \\ &= \frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5\times 5\times 3-3\times 3\times 5} \\ &= \frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{5\times 6} \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{10}\sqrt{5}\,. \end{aligned}$$

4. (a) Em $\mathbb{C}[x]$, $p(x)$ decompõe-se em 7 factores lineares (pois $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado) correspondentes às suas 7 raízes em $\mathbb{C}$. Além disso, como sabemos, as raízes complexas não reais aparecem aos pares. Então, como 7 é ímpar, uma das 7 raízes raízes é necessariamente real.

(b) O polinómio $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}[x]$ (pelo critério de Eisenstein, $p=3$). Então o polinómio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ é o polinómio mónico associado de $p(x)$, ou seja, o polinómio $x^7+6x^5+\frac{3}{2}x^3+3x+3$. Assim $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=7$. Como

este número não é uma potência de 2, pelo critério algébrico estudado sobre a construtibilidade (por régua e compasso) de números, podemos concluir que α não é construtível a partir dos racionais.

5. É claro que $\theta = \sqrt[5]{7}$ (as outras 4 raízes não são reais):



ω = raiz quinta de 1, no 1º quadrante

Portanto, θ tem polinómio mínimo $x^5 - 7$ sobre $\mathbb{Q}$. Qualquer $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}(\theta)$, $\Phi : \mathbb{Q}(\theta) \to \mathbb{Q}(\theta)$, mantém fixos os números racionais e transforma θ numa raiz do mesmo polinómio em $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) \subseteq \mathbb{R}$. Logo, necessariamente, $\Phi(\theta) = \theta$ e só existe um $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}(\theta)$:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) & \to & \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) \\ & a \in \mathbb{Q} & \mapsto & a \\ & \sqrt[5]{7} & \mapsto & \sqrt[5]{7} \end{array}$$

que é a identidade. Assim, $Gal(\mathbb{Q}(\theta), \mathbb{Q})$ é o grupo trivial $S_1 = \{id\}$.

6. Seja $\{a_i\}_{i\in I}$ uma base do espaço vectorial L sobre K e seja $\{b_j\}_{j\in J}$ uma base do espaço vectorial M sobre L. Bastará provar que $\{a_i b_j\}_{i\in I, j\in J}$ é uma base do espaço vectorial M sobre K.

   É claro que cada elemento $a_i b_j$ pertence a M, pois cada $a_i \in L \subseteq M$ e cada $b_j \in M$. Provemos que se trata de um conjunto de vectores linearmente independente sobre K:

   Se $\sum_{i\in I, j\in J} \kappa_{ij} a_i b_j = 0$, com $\kappa_{ij} \in K$, isto significa que $\sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} \kappa_{ij} a_i\Big) b_j = 0$. Como cada $\sum_{i\in I} \kappa_{ij} a_i$ pertence a L e os b_j são linearmente independentes sobre L, então $\sum_{i\in I} \kappa_{ij} a_i = 0$ para qualquer $j \in J$. Mas os a_i são linearmente independentes sobre K e, portanto, $\kappa_{ij} = 0$ para quaisquer $i \in I$ e $j \in J$.

   Finalmente, vejamos que se trata de um conjunto de geradores de M sobre K:

   Seja $c \in M$. Então podemos escrever $c = \sum_{j\in J} l_j b_j$, onde $l_j \in L$, porque $\{b_j\}_{j\in J}$ é uma base de M sobre L. Mas, por sua vez, cada l_j é uma combinação linear $l_j = \sum_{i\in I} \kappa_{ij} a_i$, porque $\{a_i\}_{i\in I}$ é uma base de L sobre K. Consequentemente,

$$c = \sum_{j\in J} (\sum_{i\in I} \kappa_{ij} a_i) b_j = \sum_{i\in I, j\in J} \kappa_{ij} a_i b_j.$$