

NOME DO ALUNO: \_\_\_\_\_

(Justifique convenientemente as suas respostas.)

**Seja  $(A, +, \cdot)$  um anel arbitrário.**

- (1) Prove que em  $A$ ,  $0 = -0$ .
- (2) A equação  $a + x = b$  ( $a, b \in A$ ) tem exactamente uma solução em  $A$ . O que é que pode dizer sobre a equação  $ax = b$ ?

**Suponha que  $A$  tem uma identidade 1.**

- (3) Mostre que se  $a \in A$  é tal que  $a^2 = a$ , então  $aAa := \{axa \mid x \in A\}$  é um subanel de  $A$  com identidade  $a1a = a$ .

**Suponha que  $A$  é comutativo.**

- (4) Prove que  $R(A) := \{a \in A \mid a^n = 0 \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$  é um ideal de  $A$ .
- (5) Justifique que  $R(A/R(A))$  se reduz ao zero do anel  $A/R(A)$ .
- (6) Mostre que  $R(A)$  está contido em qualquer ideal primo de  $A$ .

**Suponha agora que  $A$  é um domínio de integridade.**

Para as afirmações seguintes, escreva uma prova se a afirmação é verdadeira, senão apresente um contra-exemplo:

- (7)  $a^2 = 1 \Rightarrow (a = 1 \vee a = -1)$ .
- (8)  $-1 \neq 1$ .
- (9)  $(ab = ac \wedge a \neq 0) \Rightarrow b = c$ .

**Finalmente, assumo que  $A$  é um corpo.**

- (10) Mostre que se  $\varphi : A[x] \rightarrow A[x]$  é um isomorfismo tal que  $\varphi(a) = a$  para qualquer  $a \in A$ , então  $\varphi(x) = cx + d$  para algum par  $c, d \in A$ .
-