

- (1) Basta observar que, por definição de 0, se tem $0 + 0 = 0$.
(Outra justificação: como $0 + (-0) = 0 = 0 + 0$ então, pela lei do corte, $-0 = 0$.)
- (2) Se a é invertível então a equação $ax = b$ tem uma solução única: $ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}b$. Caso contrário, pode acontecer tudo, isto é, pode não ter solução (por exemplo, em \mathbb{Z}_4 , $2x = 3$ não tem solução) ou mais do que uma solução (por exemplo, em \mathbb{Z}_4 , $2x = 0$ tem duas soluções: 0 e 2). Podemos dizer um pouco mais: se a tem um inverso à direita a_d^{-1} então a equação tem pelo menos uma solução ($x = a_d^{-1}b$) que é única quando esse inverso também é inverso à esquerda.
- (3) aAa é claramente não vazio (contém, por exemplo, os elementos $a0a = 0$ e $a1a = a$). Sejam axa e aya dois elementos arbitrários de aAa . Então $axa - aya = a(xa - ya) = a(x - y)a \in aAa$ e $(axa)(aya) = a(xay)a \in aAa$. Isto mostra que aAa é um subanel de A . Além disso, $(a1a)(axa) = aaxa = axa$ e $(axa)(a1a) = axaa = axa$.
- (4) É evidente que $0 \in R(A)$. Sejam $a, b \in R(A)$ (suponhamos $a^n = 0$ e $b^m = 0$). Então $a^t = 0$ para qualquer $t \geq n$ e $b^s = 0$ para qualquer $s \geq m$. Portanto, para $k \geq n$ e usando a fórmula binomial $(a - b)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$, válida em qualquer anel comutativo, temos:

i	$k - i$	$a^i b^{k-i}$
0	k	b^k
1	$k - 1$	$a b^{k-1}$
2	$k - 2$	$a^2 b^{k-2}$
\vdots	\vdots	\vdots
$n - 1$	$k - n + 1$	$a^{n-1} b^{k-n+1}$
n	$k - n$	$a^n b^{k-n} = 0$
$n + 1$	$k - n - 1$	$a^{n+1} b^{k-n-1} = 0$
\vdots	\vdots	\vdots
k	0	$a^k = 0$

Assim, como os a^i são nulos a partir de $i = n$, para garantirmos que todas as parcelas no somatório são nulas (e assim garantirmos que $(a - b)^k = 0$, mostrando que $a - b \in R(A)$) basta exigir que $k - n + 1 \geq m$ (para que tenhamos $b^{k-i} = 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$). Portanto, para $k \geq m + n - 1$, $(a - b)^k = 0$.

Finalmente, sejam $a \in A$ e $b \in R(A)$ (com $b^n = 0$). Então $(ab)^n = a^n b^n = 0$, o que mostra que $ab \in R(A)$.

- (5) Seja $a + R(A) \in R(A/R(A))$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(a + R(A))^n = 0 + R(A)$. Isto significa que $a^n + R(A) = 0 + R(A)$, isto é, $a^n \in R(A)$. Portanto, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $(a^n)^m = 0$, ou seja $a^{nm} = 0$. Logo $a \in R(A)$ e, conseqüentemente, $a + R(A) = 0 + R(A)$, como desejávamos mostrar.
- (6) Seja I um ideal primo de A . Se $a \in R(A)$ então $a^n = 0$ para algum natural n . Mas $aa^{n-1} = a^n = 0 \in I$ e I é primo, o que implica $a \in I$ ou $a^{n-1} \in I$. No primeiro caso concluímos logo o que desejávamos. No segundo caso, aplicando o mesmo raciocínio, podemos concluir que $a \in I$ ou $a^{n-2} \in I$. Repetindo o raciocínio indutivamente chegaremos, ao cabo de um número finito de passos, à conclusão de que $a \in I$ sempre.
- (7) Afirmação verdadeira: $a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a + 1) = 0$. Como não existem divisores de zero em A então $a - 1 = 0$ ou $a + 1 = 0$, isto é, $a = 1$ ou $a = -1$.
- (8) Contra-exemplo: em \mathbb{Z}_2 , $-1 = 1$ pois $1 + 1 = 0$.
- (9) Afirmação verdadeira: $ab = ac \Leftrightarrow a(b - c) = 0$. Como $a \neq 0$ e não existem divisores de zero em A então $b - c = 0$, ou seja, $b = c$.
- (10) Pelo algoritmo da divisão em $A[x]$, $\varphi(x) = q(x)x + d$ para algum $q(x) \in A[x]$ e algum $d \in A$. Como φ é sobrejectiva, existem $q_1(x)$ e $p(x)$ em $A[x]$ tais que $\varphi(q_1(x)) = q(x)$ e $\varphi(p(x)) = x$. Portanto, $\varphi(x) = \varphi(q_1(x))\varphi(p(x)) + \varphi(d) = \varphi(q_1(x)p(x) + d)$. Agora, pela injectividade de φ , podemos concluir que $x = q_1(x)p(x) + d$, o que implica que $gr(q_1(x)p(x)) = 1$. Conseqüentemente, ou $gr(q_1(x)) = 1$ e $gr(p(x)) = 0$, ou $gr(q_1(x)) = 0$ e $gr(p(x)) = 1$. Suponhamos que acontece o primeiro caso. Então $p(x) = a \in A$, o que implica $x = \varphi(p(x)) = \varphi(a) = a$, uma contradição. Logo, ocorre necessariamente o segundo caso: $q_1(x) = c \in A$ e $\varphi(x) = \varphi(q_1(x)p(x) + d) = \varphi(cp(x) + d) = cx + d$.
-