---

(1) Como

$$x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5 = (2x^3 - 2)(4x^4 + 5x^3 + 4x + 2) + 5x + 2$$

e

$$2x^3 - 2 = (5x + 2)(6x^2 - x + 6)$$

então $mdc(x^7 - 4x^6 + x^3 - 3x + 5, 2x^3 - 2)$ é o polinómio mónico associado de $5x + 2$, ou seja, $3(5x + 2) = x + 6$.

(2) $p(x)$, pelo critério de Eisenstein (com $p = 2$), é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

As possíveis raízes racionais de $q(x) = x^4 - x^2 - 2$ são 1, -1, 2 e -2. Nenhuma delas é raiz pelo que o polinómio não tem raízes racionais. Assim, a única hipótese dele ser redutível sobre $\mathbb{Q}$ é factorizar-se na forma

$$q(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

para alguns racionais a, b, c, d. Resolvendo o sistema correspondente

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + ac + d = -1 \\ ad + bc = 0 \\ bd = -2. \end{cases}$$

chega-se a uma solução:

$$q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2).$$

Portanto, $q(x)$ é redutível sobre $\mathbb{Q}$.

$r(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se e só se $8x^3 - 6x - 1$ o for. As possíveis raízes racionais deste último polinómio são: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Nenhuma delas é de facto uma raiz pelo que o polinómio, não tendo raízes em $\mathbb{Q}$ e sendo de grau 3, é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

(3) (a) Se $p(x)$ tem uma raiz a em D então, pelo Teorema do Resto, $p(x) = (x - a)q(x)$ para algum polinómio $q(x) \in D[x]$. Pela regra dos graus, $q(x)$ tem necessariamente grau ≥ 1, pelo que não é uma unidade de $D[x]$. Portanto, $(x - a)q(x)$ é uma factorização não trivial de $p(x)$ em $D[x]$, o que mostra que este polinómio é redutível em $D[x]$.

(b) Por exemplo, o polinómio $q(x)$ do Exercício 2 é redutível em $\mathbb{Q}[x]$ mas não tem raízes racionais.

(4) (a) Sabemos já (Exercício 2) que $q(x)$ não tem raízes racionais e $q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2)$. Portanto, esta é a factorização de $q(x)$ em factores irredutíveis.

(b) Seja θ uma raiz de $q(x)$. Pelo Teorema da Torre,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\theta):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2},\theta):\mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = 2[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\theta):\mathbb{Q}(\sqrt{2})],$$

pois x^2-2 é o polinómio mínimo de $\sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$. Qual é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$? Como θ é raiz de $q(x)=(x^2+1)(x^2-2)$ então $\theta=\pm i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ou $\theta=\pm\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. No primeiro caso, x^2+1 é o polinómio mínimo de θ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ pelo que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\theta):\mathbb{Q}]=4$ e

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\theta)=\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)=\{a+b\sqrt{2}+c\,i+d\sqrt{2}i \mid a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}.$$

No segundo caso,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\theta)=\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}.$$

(c) No caso $\theta=\pm i$, $\theta+1=1\pm i$, pelo que

$$(\theta+1)^{-1}=\frac{1}{1\pm i}=\frac{(1\mp i)}{(1\pm i)(1\mp i)}=\frac{1\mp i}{1+1}=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}i.$$

No caso $\theta=\pm\sqrt{2}$, $\theta+1=1\pm\sqrt{2}$, pelo que

$$(\theta+1)^{-1}=\frac{1}{1\pm\sqrt{2}}=\frac{(1\mp\sqrt{2})}{(1\pm\sqrt{2})(1\mp\sqrt{2})}=\frac{1\mp\sqrt{2}}{1-2}=-1\pm\sqrt{2}.$$