Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Corpos e Equações Algébricas – Exame Época Normal

Duração: 2h 30m (Sem consulta) 11/6/2010

Nota: *Justifique resumidamente as suas respostas e indique os principais cálculos.*

(1) Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Num anel A, para todo o $a \in A$, tem-se $a.0 = 0.a = 0$.

(b) Todo o domínio de integridade finito tem característica prima.

(c) O ponto $(\sqrt{p-\sqrt{p}}, \sqrt{p-\sqrt{p}})$, com p primo, é construtível a partir de $(0,0)$ e $(1,0)$.

(d) Em $\mathbb{F}_{25}$, o polinómio $x^{57} + x^2 + 2x + 1$ pode factorizar-se na forma $(x-1)q(x)$.

(e) É possível, usando régua não graduada e compasso, duplicar o cubo.

(2) Considere a aplicação $\phi : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_3$ definida por $\phi(n) = n^3 \mod 3$.

(a) Mostre que ϕ é um homomorfismo de anéis sobrejectivo.

(b) Calcule o núcleo de ϕ.

(c) Defina ideal maximal de um anel. Mostre que $Nuc(\phi)$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}_9$.

(3) Seja K um corpo e $p(x) \in K[x]$ um polinómio mónico e irredutível sobre K. Prove que existe uma extensão L de K da forma $L = K(\theta)$ onde θ é raiz de $p(x)$ em L.

(4) (a) Considere o polinómio $x^2 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Determine uma extensão L de $\mathbb{Z}_5$ onde $x^2 + 3$ seja redutível. Indique o número de elementos de L.

(b) Mostre que $\mathbb{Z}_2[x]/ < x^2 + 1 >$ não é um domínio de integridade. Construa as tabelas do anel $\mathbb{Z}_2[x]/ < x^2 + 1 >$.

(5) (a) Determine $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

(b) Determine o grupo de Galois do polinómio $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

(c) Determine $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ e indique $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) : \mathbb{Q}]$.

(d) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + i)$.

(6) Sejam a e b elementos não nulos de um domínio de integridade. Prove que $< a > = < b >$ se e só se existe uma unidade u tal que $b = au$.