Departamento de Matemática da F.C.T.U.C.

Corpos e Equações Algébricas – Exame Época de Recurso

Duração: 2h 30m (Sem consulta) 30/6/2010

Nota: *Justifique resumidamente as suas respostas e indique os principais cálculos.*

(1) Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Todo o domínio de integridade finito é um corpo.

(b) É possível usando régua (não graduada) e compasso construir o ponto $(\sqrt{p+\sqrt[3]{p}}, 0)$, com p primo, a partir dos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$.

(c) A aplicação $\phi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ definida por $\phi(n) = 5n \mod 6$ é um homomorfimo de anéis.

(d) O polinómio $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ decompõe-se em factores lineares sobre $\mathbb{Q}$.

(e) Existem corpos com 21 elementos.

(2) (a) Seja K um corpo. Prove que todo o ideal de $K[x]$ é principal.

(b) Seja o ideal $I =< x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 14, x^3 - x^2 - 7x + 7 >$ de $\mathbb{Q}[x]$. Determine $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $I =< h(x) >$.

(c) Diga justificando se I é ideal maximal de $\mathbb{Q}[x]$.

(d) O elemento $x + I$ de $\mathbb{Q}[x]/I$ tem inverso? Em caso afirmativo, calcule o inverso.

(3) Seja L uma extensão finita de K. Prove que todo o elemento de L é algébrico sobre K.

(4) (a) Determine o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ de $\mathbb{Q}$.

(b) Construa um corpo com oito elementos. Indique o seu subcorpo primo.

(5) (a) Determine a dimensão e uma base da extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \alpha)$ sendo α uma raíz não racional de $x^3 + 3x^2 + x + 3$.

(b) Calcule o inverso de $\sqrt{5} + \alpha$ em $\mathbb{Q}(\sqrt{5} + \alpha)$.

(c) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{5} + \alpha)$.

(6) Considere o anel $(\mathbb{Z}_m, \oplus_m, \otimes_m)$ e $\mathbb{Z}_m^*$ o seu grupo das unidades.

(a) Mostre que $< a >= \mathbb{Z}_m$ se e só se $a \in \mathbb{Z}_m^*$.

(b) Seja $m = p^n$, com p primo e $n > 0$. Conclua que $< a >= \mathbb{Z}_{p^n}$ se e só se $a \notin < p >$.