Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra **Corpos e Equações Algébricas**

*Duração: 1h* **Teste 1** 11/03/2011

(*Justifique convenientemente as suas respostas.*)

---

1. Partindo do anel

$$(\mathbb{Z}_6, +_6, \times_6) = (\{0,1,2,3,4,5\}, +_6, \times_6)$$

considere o anel $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ onde as operações $+$ e $\cdot$ são definidas por

$$a + b = a +_6 b +_6 1, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_6$$

$$a \cdot b = a +_6 b +_6 (a \times_6 b), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}_6.$$

   (a) Denotando o zero de $\mathcal{A}$ por $0_{\mathcal{A}}$ e a identidade (caso exista) por $1_{\mathcal{A}}$, preencha (quando possível) o seguinte quadro:

| $0_{\mathcal{A}}$ | $1_{\mathcal{A}}$ | $-0$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ | $0^{-1}$ | $1^{-1}$ | $2^{-1}$ | $3^{-1}$ | $4^{-1}$ | $5^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | |

   (b) Quais são os elementos invertíveis de $\mathcal{A}$? E os divisores de zero?

2. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Prove-as.

   (a) Seja $A$ um anel. Então $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ para quaisquer $a, b \in A$.

   (b) Num anel com identidade, todo o elemento que não é um divisor de zero é invertível.

   (c) A função $h : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ definida por $h(a) = a^4$ é um homomorfismo de anéis.

3. Sendo $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo qualquer, considere o conjunto

$$\mathcal{N}(A) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}.$$

   (a) Calcule $\mathcal{N}(\mathbb{Z})$ e $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_{16})$.

   (b) Verifique que $\mathcal{N}(A)$ é um ideal de $A$.

   (c) Calcule $\mathcal{N}(\frac{A}{\mathcal{N}(A)})$.

   (d) Prove que $\mathcal{N}(A)$ está contido em qualquer ideal primo $P$ de $A$.

---