Ano lectivo 1997/98 **Exame de Geometria Diferenc**

13/7/

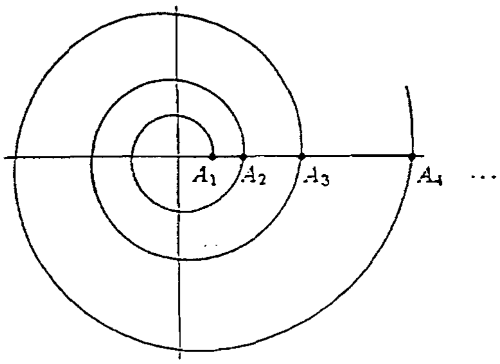
Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h 30m

---

1. Considere a curva $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(t) = (2 + t^3, t - \frac{t^3}{3}, t)$.
   (a) Mostre que a torsão de f é nula.
   (b) Prove que qualquer involuta de f é uma curva plana.

2. Considere a *espiral logarítmica*



parametrizada por $(e^t \cos t, e^t \sin t, 0)$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$.
   (a) Calcule o comprimento do arco A_1A_2.
   (b) Qual é a razão de crescimento do comprimento de um arco A_nA_{n+1} relativamente ao anterior $A_{n-1}A_n$?

3. (a) Quando é que duas curvas $f, g : I \to \mathbb{R}^3$, não necessariamente parametrizadas por comprimento de arco, se dizem *congruentes*?
   (b) Enuncie uma condição necessária e suficiente de congruência de duas curvas $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ cujas curvaturas nunca se anulam. Demonstre, no caso em que f está parametrizada por comprimento de arco, que essa condição é de facto necessária.
   (c) Conclua que, para qualquer curva plana $f : I \to \mathbb{R}^3$, parametrizada por comprimento de arco, com curvatura constante $k > 0$, $f(I)$ está contida numa circunferência de raio $1/k$.

4. Sejam

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, x^2, y^3) \end{array}$$

e $S = \Phi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
   (a) Prove que S é uma superfície.
   (b) Determine os eventuais pontos de S nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $x + y - z = 1$.
   (c) Determine a natureza dos pontos de S.

(v.s.f.f.)

Teoria

4. ~~5.~~ Sendo S uma superfície, sejam $\gamma : I \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma curva regular C^∞, parametrizada por comprimento de arco, e $p = \gamma(s_0) \in S$.

(a) Como se define a curvatura normal $k_n(\gamma, s_0)$ de γ em s_0?

(b) Mostre que $k_n(\gamma, s_0) = \left(\gamma'(s_0) \middle| N_{*p}(\gamma'(s_0))\right)$.

(c) Usando a alínea anterior, prove que $k_n(\gamma, s_0) \in [K_2(p), K_1(p)]$.