6.11

Ano lectivo 1997/98 Exame de Geometria Diferencial

10/9/98

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h 30m

---

1. Considere a curva

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (t^2, t - t^2, 2t) \end{array}$$

Determine, em cada ponto de f, a equação do plano osculador a f. Que pode concluir acerca da posição da curva relativamente a este plano?

2. Seja $g : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva C^r $(r \geq 3)$, não parametrizada por comprimento de arco, tal que $g'(t) \wedge g''(t) \neq (0,0,0)$ para qualquer $t \in J$.

(a) Indique como se define, em cada $t \in J$, o triedro de Frenet-Serret de g.

(b) Deduza a expressão de N_g' em função de T_g e B_g (suponha conhecidos os resultados para curvas parametrizadas por comprimento de arco de que necessitar).

3. Seja $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função (regular) de classe C^∞ e considere a curva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(t) = \left(\int_0^t \cos\theta(r)dr, \int_0^t \operatorname{sen}\theta(r)dr, t\right). \quad f'(t) = (\cos\theta(x), \operatorname{sen}\theta(x), 1)$$

(a) Reparametrize f por comprimento de arco.

(b) Mostre que se trata de uma hélice cilíndrica. Qual é o seu eixo?

4. Seja $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 1\}$. $= f^{-1}(1)$

(a) Prove que H é uma superfície.

(b) Para $p \in H$, determine uma equação para o conjunto dos pontos de intersecção de H com o plano tangente a H em p.

(c) H é orientável? Justifique.

5. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^4 + y^4\}$. Determine os seus pontos elípticos, hiperbólicos, parabólicos e planares.

$(x, y, x^4 + y^4)$

6. Seja

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \ ]-\pi,\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) & \longmapsto & (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z) \longrightarrow (1, \theta, z) \end{array}$$

uma parametrização do cilindro

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(v.s.f.)

e seja

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, -\pi < y < \pi\}.$$

Considere a bijecção $F : C \to \Pi$ que a cada ponto $P = \Phi(\theta, z)$ do cilindro faz corresponder o ponto $(1, \theta, z)$ de Π.

(a) Qual é o significado geométrico de F?

(b) Considere uma curva regular sobre C, $\gamma : [a, b] \to C$, definida por $\gamma(t) = \Phi(\theta(t), z(t))$. Mostre que as curvas γ e $F \circ \gamma$ têm o mesmo comprimento.

(c) Sabendo que o caminho mais curto em C entre os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3)$ define uma curva regular do tipo

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I & \longrightarrow & C \\ & t & \longrightarrow & \Phi(\theta(t), z(t)) \end{array} = (\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t), z(t))$$

determine:

(i) o comprimento desse caminho;

(ii) esse caminho.