Ano lectivo 1998/99 **Exame de Geometria Diferencial**

20/7/99

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h 30m

---

1. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^+$ considere a hélice $h_{a,r} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$h_{a,r}(s) = (r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}, a \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}).$$

(a) Mostre que $h_{a,r}$ está parametrizada por comprimento de arco.

(b) Determine a curvatura e a torsão de $h_{a,r}$.

(c) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura constante $k > 0$ e torsão constante $\tau \neq 0$. Mostre que a imagem de f é geometricamente igual à de uma das hélices da alínea (a) (qual?).

2. Seja $f :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3$ o arco de elipse parametrizado por $f(\varphi) = (\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0)$. Prove que caso as rectas normais a f nos pontos φ_1 e φ_2 estejam à mesma distância do centro da elipse então $\tan\varphi_1 \tan\varphi_2 = 2$.

(Nota: A distância da recta $p_0 + < v >$, que passa pelo ponto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e tem a direcção do vector $v \in \mathbb{R}^3$, ao ponto $p_1 \in \mathbb{R}^3$ é dada por $\dfrac{||v \wedge (p_1 - p_0)||}{||v||}$.)

3. Considere o conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^3 + y - 4z = 0\}$.

(a) Mostre que S é uma superfície.

(b) Determine os pontos de S onde o plano tangente é paralelo à recta definida pelas equações $x = 0$, $y = z$.

(c) Seja g a curva de intersecção de S com a superfície $3y^2 - 4x = 0$. Determine a relação entre a torsão de g em t e o ângulo que a recta binormal de g em t faz com o semi-eixo OZ.

4. Seja

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

o gráfico de f onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma aplicação C^∞.

(a) Prove que S é uma superfície.

(v.s.f.f.)

(b) Prove que as curvaturas gaussiana e média de S em $p=(x,y,z) \in S$ são iguais a, respectivamente,

$$K(p) = \frac{rt - s^2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

e

$$H(p) = \frac{-(1+v^2)r + 2uvs - (1+u^2)t}{2(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}},$$

onde

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ v = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

(c) Considere a superfície S dada pelo gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{6x^2 - 5xy - 6y^2}{2}.$$

$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longrightarrow (x,y,f(x,y))$

$\Phi(q) = p$

(i) Determine a natureza do ponto $(0,0,0) \in S$.

(ii) O que pode afirmar sobre a geometria local da superfície nesse ponto?

5. (a) Como se define a indicatriz de Dupin de uma superfície S num ponto $p \in S$?

(b) Se p for elíptico o que é a indicatriz de Dupin? Justifique pormenorizadamente.

elipse

$K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ ou $K_1 < 0$ e $K_2 < 0$

(c) E se p for hiperbólico?

um par de hipérboles

5 a) $P = \{v \in T_pS \mid II_p(v,v) = \pm 1\}$

$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$
$= \alpha_1^2 K_1 + \alpha_2^2 K_2$

b) p é elíptico $\Leftrightarrow$ K_1 e K_2 têm o mesmo sinal

$I_p = \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mid \alpha_1^2 K_1 + \alpha_2^2 = \pm 1\}$

$\alpha_1^2 K_1 + \alpha_2^2 K_2 = 1 \longrightarrow$ elipse

c) se p for hiperbólico K_1 e K_2 têm sinais contrários

$\alpha_1^2 K_1 - \alpha_2^2 K_2 = 1$ par de hipérbole.
ou $-\alpha_1^2 K_1 + \alpha_2^2 K_2 = 1$