Ano lectivo 1999/00 **Exame de Geometria Diferencial**

20/6/00

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h 30m

---

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Considere a hélice

$$\begin{array}{rccl} h_{a,b}: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (a\cos t, a\sin t, bt). \end{array}$$

   (a) Determine uma reparametrização de $h_{a,b}$ por comprimento de arco.

   (b) Calcule o comprimento de $h_{a,b}$ em $[0, 2\pi]$.

   (c) Quando é que $h_{a,b}$ é uma curva plana? Mostre que nesse caso a intersecção de qualquer plano osculador de h com o cilindro onde a hélice se encontra é uma circunferência.

   (d) Determine as involutas de $h_{1,1}$. São curvas planas? Em caso afirmativo, em que plano estão?

2. (a) O que é uma hélice cilíndrica?

   (b) Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva cuja curvatura nunca se anula. Enuncie uma condição necessária e suficiente para que f seja uma hélice cilíndrica. Prove que é necessária.

   (c) Considere a curva

$$\begin{array}{rccl} f_a: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (\frac{2}{3}t, t^2, at^3), \end{array}$$

   onde $a \in \mathbb{R}$. Para que valores de a é que f_a é uma hélice cilíndrica? Determine o seu eixo nesse caso.

   (d) Prove que qualquer involuta de uma hélice cilíndrica é uma curva plana.

3. Considere o parabolóide $S = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\}$.

   (a) Mostre que S é uma superfície.

   (b) Classifique os pontos de S quanto à sua natureza.

   (c) O que pode afirmar quanto à geometria local da superfície em qualquer ponto?

4. Uma *geodésica* de uma superfície S é uma curva $\gamma : I \to S$ cuja aceleração $\gamma''(t)$ pertence a $(T_{\gamma(t)}S)^\perp$ para todo o $t \in I$. Prove que:

   (a) Se S contém um segmento de recta $\gamma(t) = a + tb$ $(t \in I)$ este segmento é uma geodésica de S.

   (b) Toda a geodésica tem velocidade constante.

   (c) Se S for o cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ de raio $r > 0$ então $\gamma : I \to S$ é uma geodésica se e só se γ for uma hélice, parametrizada por

$$\gamma(t) = \Big(r\cos(at + b), r\sin(at + b), ct + d\Big),$$

   para alguns $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra