Exame de Geometria Diferencial

20/7/00

Justifique convenientemente as suas respostas e indíque os principais cálculos

Duração: 2h 30m

---

1. Considere a curva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(t) = (-t+2, t, -t+2t^2)$.
   (a) Prove que f é plana.
   (b) Determine a recta tangente a f no ponto $t = 0$.
   (c) Determine a equação do plano osculador a f em t e averigue se existe algum ponto onde esse plano seja paralelo ao plano YOZ.

2. Seja $g : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco. Se colocarmos os vectores $T_g(s)$, $s \in I$, na origem O, as suas extremidades descrevem uma curva (não necessariamente regular) $i_g : I \to S^2$ na esfera unitária, chamada *indicatriz esférica* de g.
   (a) O que é a imagem da indicatriz esférica de:
      (i) uma recta?
      (ii) uma curva plana?
   (b) Prove que a imagem de i_g está contida numa circunferência se e só se g é uma hélice cilíndrica.

3. Determine $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que a curva $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por $h(t) = (t^2, \frac{1}{3}(t^3 - 3t), \alpha(t))$, seja uma hélice cujas rectas tangentes façam um ângulo de 45° com o eixo OZ.

4. (a) Quando é que um vector $v \in \mathbb{R}^3$ é tangente a uma superfície S no ponto $p \in S$?
   (b) Seja $\Phi : U \to U'$ uma parametrização de S tal que $\Phi(q) = p$. Mostre que todo o vector v tangente a S em p é combinação linear dos vectores $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(q)$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(q)$.
   (c) Seja $S_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = c\}$ (onde $c \in \mathbb{R}$).
      (i) Para que valores de c é que S_c é uma superfície?
      (ii) Determine o plano tangente a S_1 no ponto $p = (1,1,0)$.

5. Seja $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura nunca se anula, e considere a superfície S_f parametrizada por

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (0,1) \times (0,1) & \longrightarrow & S_f \\ & (s,u) & \longmapsto & f(s) + uT_f(s). \end{array}$$

   Mostre que:
   (a) S_f não possui pontos elípticos e pontos hiperbólicos.
   (b) Se f é plana então todos os pontos de S_f são planares.
   (c) Se f não é plana então existe uma infinidade de pontos parabólicos em S_f.
   (d) Se f é uma hélice cilíndrica não plana então todos os pontos de S_f são parabólicos.
