Ano lectivo 2001/02 **Exame de Geometria Diferencial**

21/6/02

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h 30m

---

1. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Considere a hélice $h_{a,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

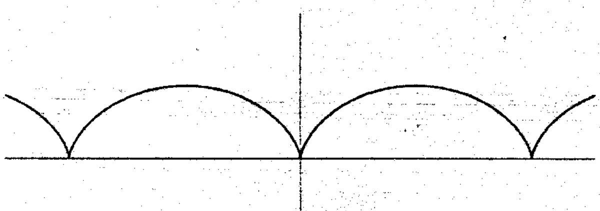
$$h_{a,r}(t) = (r\cos t, r\sin t, at).$$

   (a) Determine a curvatura e a torsão de $h_{a,r}$. Quando é que $h_{a,r}$ é uma curva plana?

   (b) Mostre que as rectas normais a $h_{a,r}$ são ortogonais ao eixo OZ.

   (c) Mostre que o ângulo definido pelo eixo OZ e pela recta tangente a $h_{a,r}$ em $h_{a,r}(t)$ é constante.

2. Considere uma circunferência $\mathcal{C}$ a rodar (sem escorregar) ao longo de uma linha recta. Recorde que a curva plana descrita por um ponto nessa circunferência se chama *ciclóide*.



   (a) Mostre que, se a linha recta for o eixo OX e $\mathcal{C}$ tiver raio $a > 0$, a ciclóide pode ser parametrizada por $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

   (b) Determine o comprimento de arco do ciclóide correspondente a uma volta completa da circunferência $\mathcal{C}$.

3. (a) Quando é que se diz que uma curva $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma hélice cilíndrica?

   (b) Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura nunca se anula. Prove que as quatro condições seguintes são equivalentes:

   (i) γ é uma hélice cilíndrica;

   (ii) os vectores normais principais são paralelos a um determinado plano fixo;

   (iii) os vectores binormais fazem um ângulo constante com uma determinada direcção fixa;

   (iv) $\dfrac{\tau}{\kappa}$ é constante.

(v.s.f.f.)

4. Um mapa global $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ de uma superfície S diz-se *conformal* se a projecção

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \to & \Pi \\ & (x,y,z) & \mapsto & (\sigma^{-1}(x,y,z),0) \end{array}$$

na superfície plana $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U, z = 0\}$ é conformal. Mostre que:

(a) O mapa σ é conformal se e só se $E = G$ e $F = 0$.

(b) O mapa σ da *superfície de Enneper*, dado por

$$\sigma(x,y) = \left(x - \frac{x^3}{3} + xy^2, y - \frac{y^3}{3} + x^2y, x^2 - y^2\right),$$

é conformal.

5. Uma *superfície minimal* é uma superfície cuja curvatura média H é nula em qualquer ponto.

(a) Seja $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ um mapa conformal (veja o exercício anterior) duma superfície S. Prove que S é minimal se e só se o *laplaciano*

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}(x,y)$$

é sempre nulo.

(b) Mostre que a superfície de Enneper é minimal.