Ano lectivo 2001/02 **Exame de Geometria Diferencial**

15/7/02

Justifique convenientemente as suas respostas e indique os principais cálculos

Duração: 2h 30m

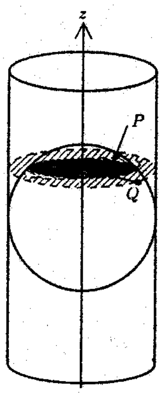
---

1. (a) Determine a curvatura, a torsão e o triedro de Frenet-Serret da curva definida por
$$\gamma(t) = (\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t).$$
   (b) Mostre que γ é uma circunferência e determine o seu centro, raio e o plano onde está.

2. (a) Seja $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva (regular) tal que todo o plano normal a g passa por um dado ponto fixo x_0 de $\mathbb{R}^3$. Prove que a imagem de g está contida numa esfera.
   (b) Mostre que, para cada $a \in \mathbb{R}$, a *curva de Viviani*
$$\begin{array}{rccc} g_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & a(1+\cos t, \sin t, 2\sin(\frac{t}{2})) \end{array}$$
   está contida numa esfera de centro (0,0,0). Qual é o raio dessa esfera?

3. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2xy - z^2 - 2yz = 1\}$.
   (a) S é uma superfície? Justifique.
   (b) Mostre, determinando-as, que a intersecção de S com o seu plano tangente no ponto $(1,-1,1)$ é constituída por duas rectas.

4. (a) O que é um difeomorfismo *equiareal* entre duas superfícies?
   (b) Mostre que um difeomorfismo $f : S_1 \to S_2$ é equiareal se e só se, para cada mapa σ_1 dum atlas de S_1, as primeiras formas fundamentais de σ_1 e $f \circ \sigma_1$ satisfazem $E_1G_1 - F_1^2 = E_2G_2 - F_2^2$.
   (c) A *projecção de Arquimedes* aplica cada ponto P de S^2 (com excepção dos pólos norte e sul) no ponto Q do cilindro vertical circunscrito à esfera definido do seguinte modo: Q é o ponto, à mesma altura de P, mais próximo de P (tal que a recta horizontal QP intersecta o eixo do cilindro).



Prove que a projecção de Arquimedes é equiareal.

(v.s.f.f.)

5. Um ponto p de uma superfície diz-se *umbilical* se as curvaturas principais $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$ são iguais. Prove que:

   (a) Todo o ponto umbilical é planar ou elíptico.

   (b) Se a superfície é minimal (isto é, $H = 0$ em qualquer ponto) então todo o ponto umbilical é planar.

   (c) Todo o ponto da esfera S^2 é umbilical.

   (d) Se S é uma superfície (conexa) no qual todo o ponto é umbilical então S é parte de um plano ou de uma esfera.